Prof. Dr. Stefan Funken
Dipl.-Math. Katharina Becker-Steinberger
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

WS 2013/2014
Blatt 10
10.01.2014

Angewandte Numerik 2

Abgabetermin: Freitag 17.01.2014, **vor der Übung**

Aufgabe 23 *(Finite Elemente Methode in 1D)* (8 Punkte)

Gegeben sei die Gleichung

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), \quad x \in \Omega = (0,1), \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die explizite Lösung dieser Gleichung für

a) $f(x) = 1$,

b) $f(x) = sin(\pi x)$ und

c) $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$

Hinweis:
Verwenden Sie jeweils einen polynomialen Ansatz für die Funktionen u_1 und u_2 mit
$u(x) = \begin{cases} u_1(x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ u_2(x), & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$
Bestimmen Sie die Koeffizienten der beiden Polynome aus den notwendigen Bedingungen an u, u' und u'' (u. a. Stetigkeit von u und u').

Aufgabe 24 *(Programmieraufgabe, Finite Elemente Methode in 1D mit Hut-Funktionen)* (16 Punkte)

Programmieren Sie die Finite Elemente Methode für

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), \quad x \in \Omega = (0,1), \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned}$$

Als Basis für den diskreten Raum X_h sollen die Hut-Funktionen verwendet werden. Zu einem gegebenen Gitter $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = 1$ definieren wir die Hut-Funktion

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x \in (x_i, x_{i+1}], \\ 0, & sonst \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, N.$$

Das Gitter soll hier als äquidistant gewählt werden, d.h. $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, N+1$ mit $h = \frac{1}{N+1}$.

a) Berechnen Sie die Einträge der Steifigkeitsmatrix zunächst auf dem Papier.

b) Berechnen Sie dann ebenfalls zunächst auf dem Papier die Komponenten der rechten Seite (Lastvektor) b des linearen Gleichungssystems mittels Quadratur. Verwenden Sie hierzu

i) die Mittelpunktsregel und

ii) die Trapezregel.

Hinweis:
Wenden Sie bei der Berechnung der i-ten Komponente b_i die jeweilige Quadraturformel auf das Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ und das Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ getrennt an. Die Komponenten b_i hängen von f ab.

c) Berechnen Sie in Ihrem Matlab-Programm den Lastvektor b mit der Mittelpunktsregel aus Teil b), mit der Trapezregel aus Teil b) und mit der Matlab-Funktion `quad`.

d) Testen Sie Ihr Programm für die verschiedenen f aus Aufgabe 23 und zeichnen Sie die Lösung jeweils für verschiedene N.

e) Plotten Sie jeweils den Fehler.

Aufgabe 25 *(Zusatz-Programmieraufgabe, FEM in 1D mit Trigonometrischen Funktionen)* (8* Punkte)

Wir betrachten wieder das Problem

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), \quad x \in \Omega = (0,1), \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned}$$

Jetzt verwenden wir als Basis für den Raum X_h die Funktionen $\varphi_k(x) = \sin(k\pi x)$, $k = 1, \ldots, N$.

a) Berechnen Sie wie in Aufgabe 24 die Einträge der Steifigkeitsmatrix zunächst auf dem Papier.

b) Testen Sie Ihr Programm wieder für die verschiedenen f aus Aufgabe 23 und zeichnen Sie die Lösung jeweils für verschiedene N. Sie dürfen zur Berechnung des Lastvektors b die Matlab-Funktion `quad` verwenden.

c) Plotten Sie jeweils den Fehler.

Hinweise:

Die Programmieraufgaben sind in Matlab zu erstellen. Senden Sie alle Files in einer E-mail mit dem Betreff **Loesung-Blatt10** an **angewandte.numerik@uni-ulm.de** (Abgabetermin jeweils wie beim Theorieteil). Drucken Sie zusätzlich allen Programmcode sowie die Ergebnisse aus und geben Sie diese vor der Übung ab. Der Source Code sollte strukturiert und, wenn nötig, dokumentiert sein.