Prof. Dr. Stefan Funken
Dipl.-Math. Katharina Becker-Steinberger
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

WS 2013/2014
Blatt 14
07.02.2014

Angewandte Numerik 2

Abgabetermin: 14.2.2014, **vor der Übung**

Aufgabe 31 *(2-D Finite Elemente: Programmieraufgabe, Elementsteifigkeitsmatrix, Poisson-Problem)* (3+3+6+6 Punkte)

a) Gegeben sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, die Bilinearform

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x,y)^T \nabla v(x,y)\, d(x,y)$$

sowie die Ansatzfunktionen $\{p_i\}_{i=1}^n$. Zeigen Sie mit der Substitutionsformel für affine Transformationen, dass gilt

$$\begin{aligned}
a_{T^{(i)}}(p_{i_\alpha}, p_{i_\beta}) &= \det B_i \int_{\hat{T}} \left(B_i^{-T} \nabla_{(\zeta,\xi)} \varphi_\beta(\zeta,\xi)\right)^T \left(B_i^{-T} \nabla_{(\zeta,\xi)} \varphi_\alpha(\zeta,\xi)\right) d(\zeta,\xi) \\
&= \det B_i \int_{\hat{T}} \nabla_{(\zeta,\xi)} \varphi_\beta(\zeta,\xi)^T B_i^{-1} B_i^{-T} \nabla_{(\zeta,\xi)} \varphi_\alpha(\zeta,\xi)\, d(\zeta,\xi) \\
&= \det B_i \int_{\hat{T}} \nabla_{(\zeta,\xi)} \varphi_\beta(\zeta,\xi)^T \left(B_i^T B_i\right)^{-1} \nabla_{(\zeta,\xi)} \varphi_\alpha(\zeta,\xi)\, d(\zeta,\xi)
\end{aligned}$$

Satz 1 (**Substitutionsformel für affine Transformationen**). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ messbar und die affine Transformation $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ definiert durch*

$$F(x) = Bx + b$$

wobei $B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ eine invertierbare quadratische Matrix und $b \in \mathbb{R}^d$ sei. Dann gilt für jede integrierbare Funktion $f : \mathcal{T}(\Omega) \to [-\infty, \infty]$

$$\int_\Omega f(Bx+b)\, dx = \frac{1}{|\det(B)|} \int_{F(\Omega)} f(y)\, dy.$$

Hinweis zur Notation: Hierbei sei $F_{T^{(i)}}(\zeta,\xi) := B_i(\zeta,\xi)^T + b = (x,y)^T$ die affine Transformation vom Referenzgebiet $\hat{T} = \operatorname{conv}((0,0),(1,0),(0,1))$ auf das jeweilige Element $T^{(i)}$. i ist also der Index des Dreiecks, das gerade transformiert werden soll. α und β sind die Indizes der lokalen Ansatzfunktionen, (also z.B. $\alpha, \beta \in \{1,2,3\}$ für lineare Ansatzfunktionen). (ζ,ξ) bezeichnet die Koordinaten im Referenzgebiet $\hat{T}$, dies entspricht also (x,y) auf dem Element $T^{(i)}$. $\varphi_{\alpha,\beta}$ bezeichnet die Ansatzfunktionen im Referenzgebiet $\hat{T}$, $p_{i_{\alpha,\beta}}$ seien die Ansatzfunktionen auf dem Element $T^{(i)}$.

b) Sei $d = 2$. Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `M=stima3(knoten)`, die für Dreickselemente $T^{(i)}$ mit Knoten $(x_1^{(i)}, y_1^{(i)})^T, (x_2^{(i)}, y_2^{(i)})^T$ und $(x_3^{(i)}, y_3^{(i)})^T$ für lineare Formfunktionen die Elementsteifigkeitsmatrizen berechnet. Assemblieren Sie möglichst geschickt die Elementsteifigkeitsmatrizen zu einer globalen Matrix. Auf der Vorlesungshomepage steht ein Programmrumpf zur Verfügung.

Hinweis: Verwenden Sie hierbei die Formel aus Aufgabenteil a), auch wenn Sie diese nicht gezeigt haben.

siehe Rückseite

c) Gegeben sei das Poisson-Problem auf $[0,1]^2$:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1 \quad \text{auf } \Omega = [0,1]^2, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

Gegeben Sei außerdem die folgende Triangulierung

Koordinaten

globale Knotennr.	x	y
1	0.0	0.0
2	1.0	0.0
3	0.5	0.5
4	0.0	1.0
5	1.0	1.0

Elemente

Elementnr.			
1	1	2	3
2	2	5	3
3	3	5	4
4	1	3	4

Stellen Sie die Steifigkeitsmatrix auf und berechnen Sie die lineare FEM-Approximation.

Hinweis: Stellen Sie zunächst die Transformation aus Aufgabenteil a) auf und berechnen Sie dann die notwendigen Einträge der Elementsteifigkeitsmatrizen mit der Formel aus a) und aus diesen die Steifigkeitsmatrix. Beachten Sie hierbei, dass Sie durch die Randbedingungen nur einen Freiheitsgrad in u haben. Die linearen Formfunktionen auf dem Referenzgebiet $\hat{T}$ lauten:

$$\varphi_1(\zeta,\xi) = 1 - \zeta - \xi, \quad \varphi_2(\zeta,\xi) = \zeta, \quad \varphi_3(\zeta,\xi) = \xi$$

d) Prüfen Sie Ihre Implementierung aus Aufgabenteil b) an dem Beispiel aus Aufgabenteil c):

Berechnen Sie den Lastvektor f approximativ durch

$$\int_{T^{(i)}} f p_i \, dx \approx \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} f(x_s, y_s)$$

hierbei bezeichne (x_s, y_s) den Schwerpunkt des Dreiecks $T^{(i)}$.

Hinweise:
Die Programmieraufgaben sind in Matlab zu erstellen. Senden Sie alle Files in einer E-mail mit dem Betreff **Loesung-Blatt14** an **angewandte.numerik@uni-ulm.de** (Abgabetermin jeweils wie beim Theorieteil). Drucken Sie zusätzlich allen Programmcode sowie die Ergebnisse aus und geben Sie diese vor der Übung ab. Der Source Code sollte strukturiert und, wenn nötig, dokumentiert sein.

Sollten Sie Fragen zu diesem Blatt haben, so wenden Sie sich bitte an Oliver Zeeb (HeHo 22, Raum E.016, oliver.zeeb@uni-ulm.de).