Prof. Dr. Stefan Funken
Dipl.-Math. Katharina Becker-Steinberger
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

WS 2013/2014
zu Blatt 10
10.01.2014

Angewandte Numerik 2
Einführung in die Finite Elemente Methode

Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), \quad x \in \Omega = (0,1) && (1)\\ u(0) &= u(1) = 0 && (2) \end{aligned}$$

für $u \in C^2((0,1)) \cap C([0,1])$.
Zunächst leiten wir eine schwächere Formulierung des Problems her. Hierzu multiplizieren wir die Gleichung (1) mit einer beliebigen Testfunktion v (aus einem geeigneten Raum X mit $v(0) = v(1) = 0$) und integrieren die Gleichung. Das liefert

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx \quad \forall v \in X.$$

Wenden wir auf der linken Seite partielle Integration an, so erhalten wir

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx \quad \forall v \in X. \tag{3}$$

Die Randterme fallen hier weg, da $v(0) = v(1) = 0$. Gleichung (3) heißt schwache Formulierung der Differentialgleichung. Im nächsten Schritt formen wir die schwache Formulierung in ein diskretes Problem um. Hierzu wählen wir die Näherungslösung u_h für u bzw. v_h für v aus einem endlich dimensionalen Funktionenraum $X_h \subset X$. Wenn $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ eine Basis von X_h ist, so können wir schreiben

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x).$$

Anstatt Gleichung (3) mit allen $v \in X_h$ zu testen, könnnen wir nun auch mit allen Basisfunktionen φ_i testen. Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} &\int_0^1 u_h'(x)\varphi_i'(x)dx = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx \quad i = 1, \dots, N \\ \Longleftrightarrow &\sum_{j=1}^N u_j \int_0^1 \varphi_j'(x)\varphi_i'(x)dx = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Wir erhalten also ein lineares Gleichungssystem der Form $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$, wobei die so genannte Steifigkeitsmatrix $\mathbf{A} = (a_{i,j})$ gegeben ist durch

$$a_{i,j} = \int_0^1 \varphi_j'(x)\varphi_i'(x)dx,$$

und die rechte Seite, der sogenannte Lastvektor, $\mathbf{b} = (b_i)$ ist gegeben durch

$$b_i = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx.$$

Lösen des linearen Gleichungssystems liefert einen Vektor $\mathbf{u}$, der zusammen mit der Basis von X_h die Näherungslösung von (3) darstellt.