Prof. Dr. Stefan Funken
Dipl.-Math. Katharina Becker-Steinberger
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

WS 2013/14
Lösungsblatt 1
25.10.2013

Angewandte Numerik 2

Aufgabe 1 *(Trennung der Variablen)* (8 Punkte)

Ermitteln Sie, wie im Tutorium gezeigt, mit Trennung der Variablen die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung erster Ordnung

$$(t^2+1)y' = y^2+1.$$

Lösung: Wir betrachten die Differentialgleichung erster Ordnung

$$(t^2+1)y' = y^2+1.$$

Trennung der Variablen liefert

$$\frac{y'}{y^2+1} = \frac{1}{t^2+1}.$$

Integration ergibt

$$\int \frac{dy}{y^2+1} = \int \frac{dt}{t^2+1}.$$

Die Stammfunktionen dieser unbestimmten Integrale sind hierbei bis auf Konstanten C_1, C_2 eindeutig bestimmt. Mit $C := C_2 - C_1$ erhalten wir für die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} & \arctan(y) + C_1 = \arctan(t) + C_2 \\ \iff \quad & \arctan(y) = \arctan(t) + C \\ \iff \quad & y = \tan(\arctan(t) + C). \end{aligned}$$

Aufgabe 2 *(Richtungsfeld)* (8 Punkte)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x' = ax - bx^3 \tag{1}$$

mit reellen Konstanten $a, b > 0$.

a) Skizzieren Sie das Richungsfeld für $a = 4, b = 1$ in $-3 \le t \le 3, -3 \le x \le 3$.

b) Es sei x eine Lösung von (1) mit $x_0 = x(0)$. Argumentieren Sie alleine mit Hilfe des Richtungsfelds, wie sich $x(t)$ für $t \to \infty$ in Abhängigkeit von x_0 verhält.

Lösung:

a) Zur Bestimmung des Richtungsfelds betrachte $x(t)$ und t an den Gitterpunkten $(t, x(t))$. Man sieht sofort, $x(t) = c$ für alle t, c konstant, d.h. in t-Richtung wiederholt sich das Feld.

$x(t)$	-3	-2.75	- 2.5	-2	-1.75	-1.5	-1	-0.75	-0.5	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25
$x'(t)$	15	9.8	5.6	0	-1.6	-2.6	-3	-2.6	-1.9	0	0.98	1.9	2.6	3	3

Skizze siehe Übung, ggf. nachfragen.

Bemerkung für Interessierte: (Nicht klausurrelevant) Bei der obigen Differentialgleichung handelt es sich um eine *Bernoullische Differentialgleichung* der allgemeinen Form

$$y'(t) + a(t)y(t) + b(t)(y(t))^{\alpha} = 0, \quad \alpha \neq 0, 1.$$

Diese können durch die Substitution $u(t) := (y(t))^{1-\alpha}$ in eine *lineare Differentialgleichung* transformiert werden. Man erhält

$$u'(t) + (1-\alpha)a(t)u(t) = (\alpha - 1)b(t).$$

Lineare ODEs lassen sich mittels *Variation der Konstanten* lösen. Man beachte allerdings, dass durch die Rücktransformation $y = u^{\frac{1}{1-\alpha}}$ eventuell Singularitäten auftreten können.

Die exakte Lösung der obigen ODE lautet

$$x(t) = \pm \frac{2}{\sqrt{1 + 4e^{-8t}C}}$$

mit $C = C(x(0))$.

b) In Abhängigkeit vom Startwert ergibt sich

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \begin{cases} -2 & x_0 < 0, \\ 0 & x_0 = 0, \\ 2 & x_0 > 0. \end{cases}$$

Aufgabe 3 *(Programmieraufgabe, Matlab Solver* `ode45`*)* (8 Punkte)

Bestimmen Sie mit der Matlab-Funktion `ode45` Näherungslösungen für die folgenden Anfangswertprobleme und stellen Sie diese mit Hilfe der Matlab-Funktion `plot` grafisch dar:

a) $y'(t) = (2 - y(t))\, y(t)$
Verwenden Sie verschiedene Startwerte und plotten Sie diese in der gleichen Grafik.

b) *Zeeman'sches Herzschlagmodell*
Zeemanns Herzschlagmodell beschreibt die Funktionsweise des Herzens. Gesuchte Größen sind die Länge der Herzmuskelfaser $l(t)$ und das elektrochemische Potential $p(t)$. Das Modell wird beschrieben durch das System

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} l(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(l(t)^3 - \alpha l(t) + p(t)) \\ \beta l(t) \end{pmatrix},$$

wobei α die Vorspannung der Muskelfaser und β der Rückkopplungsparameter sind. Berechnen Sie Ihre Näherungslösung im Zeitintervall $[0, 100]$, verwenden Sie die Parameterwerte $\alpha = 3$ und $\beta = 0.1$ und die Anfangswerte $l(0) = 1$ und $p(0) = 0$.

Lösung:

a)

```
function [ dy ] = Wachstum( t,y )
%% Angewandte Numerik 2, WS 2013/2014
% Aufgabe 3a: Matlab Solver ode45, logistisches Wachstum
%
% Loesungsvorschlag
%
% rechte Seite der DGL y' = f(t, y)
```

```

% Input:   t:      Zeit
%          y:      Vektor y
% Output: dy:      Vektor y' = f(t, y)



alpha = 2.0;            % Parameter innerhalb der Funktion hart definiert
beta  = 1.0;

dy = (alpha - beta*y) * y;      % Modellgleichung

end
```

```
% Angewandte Numerik 2, WS 2013/2014
% Aufgabe 3a: Matlab Solver ode45, logistisches Wachstum
%
% Loesungsvorschlag
%
% Hauptprogramm:
%   Aufruf der Matlab Funktion ode45 mit mehreren Startwerte
%   Plotten der Naeherungsloesungen in die gleiche Grafik


clear all;
close all;


figure(1);              % alles in 1 Grafik plotten
hold on;

t0 = 0;
tn = 6;
Startwerte = 0.1:0.1:4;

for y0 = Startwerte     % Naeherungswerte fuer mehrere Startwerte berechnen
    [T,Y] = ode45(@Wachstum, [t0 tn], y0);
            % Input:  @Wachstum: function handle fuer rechte Seite der DGL
            %         [t0, tn]: Integrationsintervall
            %         y0: Startwert
            % Output: T: Spaltenvektor der Zeitpunkte tk (jeder Zeitschritt)
            %         Y: Spaltenvektor mit Naeherungswerten yk
    plot(T,Y)
end

title('Logistisches Wachstum', 'FontSize', 14);
xlabel('t', 'FontSize', 14);
ylabel('y', 'FontSize', 14);
legend('y(t), y''=(2-y)y', 'Location', 'Best');

hold off;
```

b)

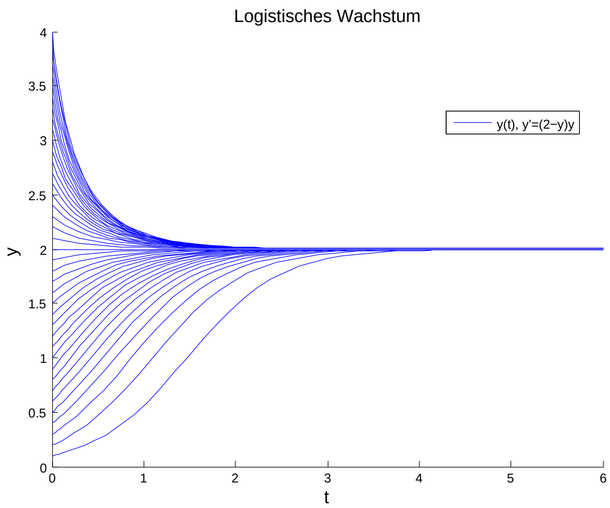
```
function [ dy ] = ZeemannHerzschlag( t, y, alpha, beta )
% Angewandte Numerik 2, WS 2013/2014
```

```
% Aufgabe 3b: Matlab Solver ode45, Zeemanns Herzschlagmodell
%
% Loesungsvorschlag
%
% rechte Seite der Modellgleichung y' = f(t, y)

% Input:  t:      Zeit
%         y:      Vektor y
%         alpha:  Vorspannung der Muskelfaser
%         beta:   Rueckkopplungsparameter
% Output: dy:     Vektor y' = f(t, y)


dy = zeros(2,1);            % Spaltenvektor fuer 2 Werte
                            % dy(1) = dl(t)/dt
                            % dy(2) = dp(t)/dt

l = y(1);                   % Laenge der Herzmuskelfaser
p = y(2);                   % elektrochemisches Potential

dl = -(l^3 - alpha*l + p);  % Modellgleichung
dp = beta * l;

dy = [dl; dp];

end
```

```
% Angewandte Numerik 2, WS 2013/2014
% Aufgabe 3b: Matlab Solver ode45, Zeemanns Herzschlagmodell
%
% Loesungsvorschlag
%
% Hauptprogramm:
%   Aufruf der Matlab Funktion ode45


clear all;
close all;

Zeitintervall = [0 100];
Anfangswert = [1 0];

alpha = 3;
beta  = 0.1;

[T,Y] = ode45(@(t, y) ZeemannHerzschlag(t, y, alpha, beta), ...
              Zeitintervall, Anfangswert);
              % anonyme Funktion, damit alpha und beta
              % an ZeemannHerzschlag uebergeben werden koennen
              % und nicht innerhalb der Funktion ZeemannHerzschlag hart
              % definiert werden muessen

         % Input:  @(t, y): function handle fuer rechte Seite der DGL,
         %              hier anonyme Funktion, s.o.
```

```
            %           Zeitintervall: Integrationsintervall
            %           Anfangswert: Vektor der Startwerte
            % Output: T: Vektor der Zeitpunkte tk (jeder Zeitschritt)
            %           Y: Vektor mit Naeherungswerten yk = [dl dp]

plot(T,Y)
title(['Zeemanns Herzschlagmodell (\alpha = ', num2str(alpha), ...
             ', \beta = ', num2str(beta), ')'], 'FontSize', 14);
xlabel('t', 'FontSize', 14);
ylabel('l, p', 'FontSize', 14);
legend('l(t)', 'p(t)', 'Location', 'Best');
```

Es ergeben sich die folgenden beiden Grafiken:



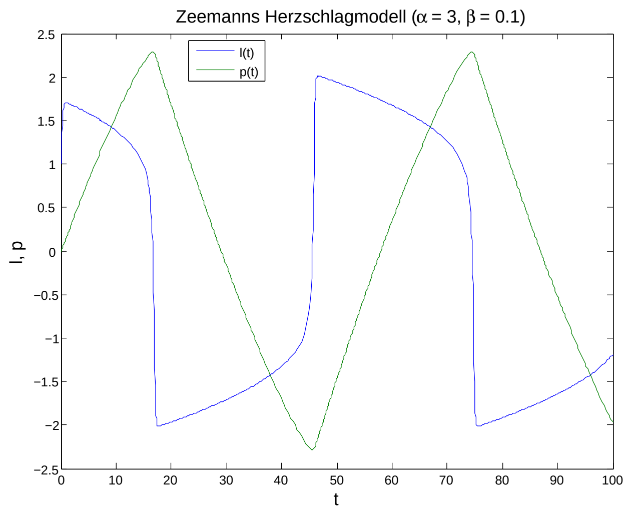


Abbildung 1: Links: a) Plot des logistischen Wachstums y für verschiedene Startwerte, rechts: b) Plot der Länge der Herzmuskelfaser l und des elektrochemischen Potentials p.