Prof. Dr. Stefan Funken
Dipl.-Math. Katharina Becker-Steinberger
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

WS 2013/2014
Lösungsblatt 7
13.12.2013

Angewandte Numerik 2

Aufgabe 14 *(Fortsetzung: Mehrschrittverfahren, Konsistenzordnung, Konvergenz)* (4 Punkte)

Prüfen Sie, ob das Mehrschrittverfahren aus Aufgabe 12

$$y_{j+4} - y_j = \frac{h}{3}(8f_{j+1} - 4f_{j+2} + 8f_{j+3})$$

konvergent ist.

Hinweis: In Aufgabe 12 haben Sie bereits die Konsistenzordnung $p = 4$ dieses Mehrschrittverfahrens bestimmt. Es gilt: *Ein lineares Mehrschrittverfahren ist genau dann konvergent, wenn es konsistent und stabil ist (Dahlquist).* Somit bleibt noch die Stabilität zu zeigen.

Definition 1. *Ein lineares Mehrschrittverfahren heißt* stabil *(auch* null-stabil*), wenn alle Nullstellen z_j des charakteristischen Polynoms $\rho(z) = \sum_{r=0}^{k} \alpha_r z^r$ in der Einheitskreisscheibe liegen, d.h. wenn $|z_j| \leq 1$, und die Nullstellen auf dem Rand, d.h. die Nullstellen mit $|z_j| = 1$, nur einfach auftreten.*

Lösung:

In Aufgabe 12 wurde bereits die Konsistenz des Verfahrens überprüft und die Konsistenzordnung bestimmt. Wir geben die Lösung zu Aufgabe 12 hier nochmals an:

1. Prüfe *Konsistenz*:
   Zeige hierzu

$$\sum_{i=0}^{4} \alpha_i = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{4} i\alpha_i - \sum_{i=0}^{4} \beta_i = 0.$$

   Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{4} \alpha_i &= 1 - 1 = 0, \\
\sum_{i=0}^{4} i\alpha_i &= 4 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = 4 \quad \text{und} \\
\sum_{i=0}^{4} \beta_i &= \frac{8}{3} - \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = \frac{12}{3} = 4.
\end{aligned}$$

   Das Verfahren ist somit konsistent.

2. Prüfe *Konsistenzordnung*:
   Bestimme hierzu größtes p mit

$$\sum_{i=0}^{4} \alpha_i i^l = l \sum_{i=0}^{4} \beta_i i^{l-1}, \quad \forall l = 2, \ldots, p.$$

Für $l = 2$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{4} \alpha_i i^2 = 1 \cdot 4^2 = 16 \quad \text{und}$$
$$2\sum_{i=0}^{4} \beta_i i = 2\left(\frac{8}{3} \cdot 1 - \frac{4}{3} \cdot 2 + \frac{8}{3} \cdot 3\right) = 16.$$

Für $l = 3$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{4} \alpha_i i^3 = 1 \cdot 4^3 = 64 \quad \text{und}$$
$$3\sum_{i=0}^{4} \beta_i i^2 = 3\left(\frac{8}{3} \cdot 1 - \frac{4}{3} \cdot 2^2 + \frac{8}{3} \cdot 3^2\right) = 3\left(\frac{8}{3} - \frac{16}{3} + \frac{72}{3}\right) = 64.$$

Für $l = 4$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{4} \alpha_i i^4 = 1 \cdot 4^4 = 256 \quad \text{und}$$
$$4\sum_{i=0}^{4} \beta_i i^3 = 4\left(\frac{8}{3} \cdot 1 - \frac{4}{3} \cdot 2^3 + \frac{8}{3} \cdot 3^3\right) = 4\left(\frac{8}{3} - \frac{32}{3} + \frac{216}{3}\right) = 4\,\frac{192}{3} = 256.$$

Für $l = 5$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{4} \alpha_i i^5 = 1 \cdot 4^5 = 1024, \quad \text{aber}$$
$$5\sum_{i=0}^{4} \beta_i i^5 = 5\left(\frac{8}{3} \cdot 1 - \frac{4}{3} \cdot 2^4 + \frac{8}{3} \cdot 3^4\right) = 5\left(\frac{8}{3} - \frac{64}{3} + \frac{648}{3}\right) = \frac{2960}{3} = 986,666.$$

Das Verfahren hat also die Konsistenzordnung $p = 4$.

Hier in Aufgabe 14 soll geprüft werden, ob das Verfahren konvergent ist:

3. Prüfe *Konvergenz*:

   Ein lineares Mehrschrittverfahren ist genau dann konvergent, wenn es konsistent und stabil ist.

   Es bleibt somit noch die Stabilität zu zeigen.

   Ein lineares Mehrschrittverfahren ist stabil, wenn alle Nullstellen z_j des charakteristischen Polynoms $\rho(z)$ in der Einheitskreisscheibe liegen, d. h. $|z_j| \leq 1$, und diejenigen, die auf dem Rand liegen, d. h. $|z_j| = 1$, nur einfach auftreten.

   Betrachte das charakteristische Polynom $\rho(z) = \alpha_4 z^4 + \alpha_3 z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z^1 + \alpha_0 = z^4 - 1$ zur obigen Gleichung. Die Berechnung der Nullstellen liefert

   $$\rho(z) = z^4 - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z_1 = 1, z_2 = -1, z_3 = i, z_4 = -i.$$

   Da $|z_1| = 1$, $|z_2| = 1$, $|z_3| = 1$, $|z_4| = 1$ und alle Nullstellen $z_1, \ldots, z_4$ einfache Nullstellen sind, ist das Verfahren stabil. Somit folgt die Konvergenz des Mehrschrittverfahrens.

Aufgabe 15 *(Mehrschrittverfahren, Milne-Simpson Verfahren, Konsistenz, Stabilität)* (4+4+8* Punkte)

Gegeben sei das Milne-Simpson Verfahren mit Schrittzahl $k = 2$:

$$y_{j+1} = y_{j-1} + \frac{h}{3}(f_{j+1} + 4f_j + f_{j-1})$$

a) Untersuchen Sie das Verfahren auf Konsistenz und Stabilität und bestimmen Sie seine Konsistenzordnung.

b) Wenden Sie das Verfahren auf die folgende Anfangswertaufgabe an

$$y' = -y, \quad y(0) = 1$$

Stellen Sie die resultierende homogene, lineare Differenzengleichung für die Näherung y_j auf und bestimmen Sie deren Lösung. Als Startschritt zur Berechnung von y_1 verwenden Sie einen expliziten Euler-Schritt.

c) Zeigen Sie für die Näherung aus b) durch Entwicklung der h-Potenzen:

$$\begin{aligned} y_j &= c_1(h)\lambda_1(h)^j + c_2(h)\lambda_2(h)^j, \\ \lambda_1(h) &= 1 - h + O(h^2), \\ \lambda_2(h) &= -(1 + h/3) + O(h^2), \\ c_1(h) &= 1 + O(h^2), \\ c_2(h) &= O(h^2). \end{aligned}$$

Welche Folgerung ergibt sich hieraus für die Näherung $y(t, h)$ an einer festen Stelle $t > 0$?

Hinweis: Verwenden Sie bei Aufgabenteil b) den folgenden Satz:

Satz 1. *Gegeben sei eine lineare, homogene Differenzengleichung mit Koeffizienten α_i, $\alpha_k \neq 0$*

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i w_{j+i} = 0, \quad j = 0, 1, \ldots$$

Dann gilt:

a) Ist z_1 eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\rho(z) := \sum_{i=0}^{k} \alpha_i z^i$, so ist durch $w_j := z_1^j$ eine Lösung der Differenzengleichung gegeben.

b) Ist z_1 eine doppelte Nullstelle von ρ, so ist neben $w_j := z_1^j$ auch $\tilde{w}_j := j z_1^j$ eine Lösung der Differenzengleichung.

c) Sind $z_1, \ldots, z_k$ die paarweise verschiedenen (einfachen) Nullstellen von ρ, so lautet die allgemeine Lösung der Differenzengleichung $w_j = \sum_{i=1}^{k} c_i z_i^j$.

Lösung:

a) Aus

$$y_{j+1} = y_{j-1} + \frac{h}{3}(f_{j+1} + 4f_j + f_{j-1})$$

erhält man durch Indexverschiebung

$$y_{j+2} = y_j + \frac{h}{3}(f_{j+2} + 4f_{j+1} + f_j),$$

also $\alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_0 = -1$, $\beta_2 = \frac{1}{3}$, $\beta_1 = \frac{4}{3}$ und $\beta_0 = \frac{1}{3}$.

1. Prüfe *Konsistenz*:
   Zeige hierzu

$$\sum_{i=0}^{2} \alpha_i = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{2} i\alpha_i - \sum_{i=0}^{2} \beta_i = 0.$$

Es gilt

$$\sum_{i=0}^{2} \alpha_i = -1 + 0 + 1 = 0,$$
$$\sum_{i=0}^{2} i\alpha_i = 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2 \quad \text{und}$$
$$\sum_{i=0}^{2} \beta_i = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

Somit ist das Verfahren konsistent.

2. Bestimme *Konsistenzordnung:*
   - $l = 2$:
   $$\sum_{i=0}^{2} \alpha_i i^2 = 1 \cdot 2^2 = 4 \quad \text{und}$$
   $$2\sum_{i=0}^{2} \beta_i i^1 = 2\left(\frac{1}{3}0 + \frac{4}{3}1 + \frac{1}{3}2\right) = 2\,\frac{6}{3} = 4.$$
   - $l = 3$:
   $$\sum_{i=0}^{2} \alpha_i i^3 = 1 \cdot 2^3 = 8 \quad \text{und}$$
   $$3\sum_{i=0}^{2} \beta_i i^2 = 3\left(\frac{1}{3}0 + \frac{4}{3}1^2 + \frac{1}{3}2^2\right) = 3\left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3}4\right) = 8.$$
   - $l = 4$:
   $$\sum_{i=0}^{2} \alpha_i i^4 = 1 \cdot 2^4 = 16 \quad \text{und}$$
   $$4\sum_{i=0}^{2} \beta_i i^3 = 4\left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3}2^3\right) = 4\left(\frac{4}{3} + \frac{8}{3}\right) = 16.$$
   - $l = 5$:
   $$\sum_{i=0}^{2} \alpha_i i^5 = 1 \cdot 2^5 = 32, \quad \text{aber}$$
   $$5\sum_{i=0}^{2} \beta_i i^4 = 5\left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3}2^4\right) = 5\left(\frac{4}{3} + \frac{16}{3}\right) = 5\,\frac{20}{3} = \frac{100}{3}.$$

   Somit hat das Verfahren die Konsistenzordnung $p = 4$.
3. Prüfe *Stabilität:* :
   Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms
   $$\rho(z) = z^2 - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (z-1)(z+1) = 0$$
   sind $z_1 = 1$ und $z_2 = -1$. Da $|z_1| = 1$, $|z_2| = 1$ und beide Nullstellen einfache Nullstellen sind, ist das Verfahren stabil und damit auch konvergent.

b) Anwenden des Verfahrens auf die Differentialgleichung $y' = -y$ liefert

$$f_{j+2} = -y_{j+2}, f_{j+1} = -y_{j+1}, f_j = -y_j$$

und damit

$$\begin{aligned}
& & y_{j+2} - y_j &= \frac{h}{3}(f_{j+2} + 4f_{j+1} + f_j) \\
\iff & & y_{j+2} - y_j &= -\frac{h}{3}(y_{j+2} + 4y_{j+1} + y_j) \\
\iff & & y_{j+2} - y_j + \frac{h}{3}(y_{j+2} + 4y_{j+1} + y_j) &= 0 \\
\iff & & \left(\frac{h}{3} + 1\right) y_{j+2} + \frac{4h}{3} y_{j+1} + \left(\frac{h}{3} - 1\right) y_j &= 0. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Das charakteristische Polynom dieser Differenzengleichung lautet

$$\rho(z) = \left(\frac{h}{3} + 1\right) z^2 + \frac{4h}{3}\, z + \left(\frac{h}{3} - 1\right).$$

Bestimmung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\begin{aligned}
& & \rho(z) = \left(\frac{h}{3} + 1\right) z^2 + \frac{4h}{3}\, z + \left(\frac{h}{3} - 1\right) &= 0 \\
\iff & & z^2 + \frac{4h}{3} \frac{3}{(h+3)}\, z + \frac{h-3}{3} \frac{3}{h+3} &= 0 \\
\iff & & z^2 + \frac{4h}{h+3}\, z + \frac{h-3}{h+3} &= 0 \\
\iff & & \left(z + \frac{2h}{h+3}\right)^2 + \frac{h-3}{h+3} - \frac{4h^2}{(h+3)^2} &= 0 \\
\iff & & \left(z + \frac{2h}{h+3}\right)^2 &= \frac{4h^2}{(h+3)^2} - \frac{h-3}{h+3} \\
\iff & & z_{1/2} &= \pm\sqrt{\frac{4h^2}{(h+3)^2} - \frac{h-3}{h+3}} - \frac{2h}{h+3} \\
& & &= \pm\sqrt{\frac{4h^2 - (h-3)(h+3)}{(h+3)^2}} - \frac{2h}{h+3} \\
& & &= \pm\sqrt{\frac{4h^2 - (h^2-9)}{(h+3)^2}} - \frac{2h}{h+3} \\
& & &= \pm\sqrt{\frac{3h^2+9}{(h+3)^2}} - \frac{2h}{h+3} \\
& & &= -\frac{2h}{h+3} \pm \sqrt{\frac{3h^2+9}{(h+3)^2}} \\
& & &= \frac{-2h \pm \sqrt{3h^2+9}}{h+3}.
\end{aligned}$$

Mit Satz 1 c) folgt, dass die allgemeine Lösung der Differenzengleichung (1) lautet:

$$y_j = c_1(h)\, z_1^j + c_2(h)\, z_2^j.$$

Mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ folgt

$$y(0) = y_0 = c_1 z_1^0 + c_2 z_2^0 \overset{!}{=} 1 \quad \iff \quad c_1 + c_2 = 1. \qquad (2)$$

Macht man nun einen Schritt mit dem expliziten Euler Verfahren so gilt

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = y_0 + h \cdot (-y_0) = 1 - h$$

und damit

$$y_1 = (1-h) = c_1 z_1 + c_2 z_2.$$

Einsetzen der beiden Anfangsbedingungen ineinander liefert

$$c_1 z_1 + (1-c_1) z_2 = 1-h \quad \Longleftrightarrow \quad c_1 = \frac{1-h-z_2}{z_1-z_2}.$$

Zusammen mit den Nullstellen des charakteristischen Polynoms folgt

$$\begin{aligned}
c_1 = c_1(h) &= \frac{(1-h) - \frac{-2h-\sqrt{3h^2+9}}{h+3}}{\frac{-2h+\sqrt{3h^2+9}}{h+3} - \frac{-2h-\sqrt{3h^2+9}}{h+3}} \\
&= \frac{(h+3)(1-h) - \left(-2h-\sqrt{3h^2+9}\right)}{-2h+\sqrt{3h^2+9} - \left(-2h-\sqrt{3h^2+9}\right)} \\
&= \frac{(h+3)(1-h) + 2h + \sqrt{3h^2+9}}{2\sqrt{3h^2+9}} \\
&= \frac{(h+3)(1-h)+2h}{2\sqrt{3h^2+9}} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{3-h^2}{2\sqrt{3h^2+9}} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Wegen (2) folgt

$$c_2 = c_2(h) = 1 - c_1 = \frac{h^2-3}{2\sqrt{3h^2+9}} + \frac{1}{2}.$$

Für die allgemeine Lösung der Differenzengleichung (1) ergibt sich also:

$$\begin{aligned}
y_j &= c_1(h)\, z_1^j + c_2(h)\, z_2^j \\
&= \left(\frac{3-h^2}{2\sqrt{3h^2+9}} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{-2h+\sqrt{3h^2+9}}{h+3}\right)^j + \left(\frac{h^2-3}{2\sqrt{3h^2+9}} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{-2h-\sqrt{3h^2+9}}{h+3}\right)^j.
\end{aligned}$$

c) Nach Aufgabenteil b) gilt:

$$y_j = \underbrace{\left(\frac{3-h^2}{2\sqrt{3h^2-9}} + \frac{1}{2}\right)}_{=c_1(h)}\underbrace{\left(\frac{-2h+\sqrt{3h^2+9}}{h+3}\right)^j}_{=:\lambda_1(h)^j} + \underbrace{\left(\frac{h^2-3}{2\sqrt{3h^2-9}} + \frac{1}{2}\right)}_{=c_2(h)}\underbrace{\left(\frac{-2h-\sqrt{3h^2+9}}{h+3}\right)^j}_{=:\lambda_2(h)^j}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\lambda_1(h) &= \frac{-2h+\sqrt{3h^2+9}}{h+3} \\
\lambda_1(h)\big|_{h=0} &= \frac{0+3}{3} = 1 \\
\lambda_1'(h) &= \left(\frac{-2h+\sqrt{3h^2+9}}{h+3}\right)' = \frac{-2(h+3)+2h}{(h+3)^2} + \frac{\frac{1}{2}(3h^2+9)^{-1/2} 6h(h+3) - \sqrt{3h^2+9}}{(h+3)^2} \\
&= \frac{-6 + \frac{1}{2}(3h^2+9)^{-1/2} 6h(h+3) - \sqrt{3h^2+9}}{(h+3)^2} \\
&= \frac{-6\sqrt{3h^2+9} + 3h(h+3) - 3h^2 - 9}{(h+3)^2\sqrt{3h^2+9}} \\
&= \frac{-6\sqrt{3h^2+9} + 9h - 9}{(h+3)^2\sqrt{3h^2+9}} \\
\lambda_1'(h)\big|_{h=0} &= \frac{-18-9}{9\cdot 3} = -1
\end{aligned}$$

Somit liefert die Taylor-Entwicklung von λ_1 nach h an der Stelle $h = 0$

$$\lambda_1(h) = \lambda_1(h)\big|_{h=0} + h\lambda_1'(h)\big|_{h=0} + O(h^2) = 1 - h + O(h^2).$$

Analog gilt

$$\begin{aligned}
\lambda_2(h) &= \frac{-2h - \sqrt{3h^2+9}}{h+3} \\
\lambda_2(h)\big|_{h=0} &= \frac{-3}{3} = -1 \\
\lambda_2'(h) &= \frac{(3+h)(-2-\frac{1}{2}(3h^2+9)^{-1/2}6h) - (-2h - \sqrt{3h^2+9})}{(3+h)^2} \\
\lambda_2'(h)\big|_{h=0} &= \frac{-6+3}{9} = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

und mit der Taylor-Entwicklung von λ_2 nach h an der Stelle $h = 0$

$$\lambda_2(h) = \lambda_2(h)\big|_{h=0} + h\lambda_2'(h)\big|_{h=0} + O(h^2) = -1 - \frac{1}{3}h + O(h^2) = -(1 + \frac{1}{3}h) + O(h^2).$$

Und weiter gilt

$$\begin{aligned}
c_1(h) &= \frac{3-h^2}{2\sqrt{3h^2-9}} + \frac{1}{2} \\
c_1(h)\big|_{h=0} &= \frac{3}{2\cdot 3} + \frac{1}{2} = 1 \\
c_1'(h) &= \frac{-2h(2\sqrt{3h^2-9}) - (3-h^2)(3h^2-9)^{-1/2}6h}{4(3h^2-9)} \\
c_1'(h)\big|_{h=0} &= 0 \\
c_2(h) &= 1 - c_1(h) \\
c_2(h)\big|_{h=0} &= 1 - 1 = 0 \\
c_2'(h) &= -c_1'(h) \\
c_2'(h) &= 0,
\end{aligned}$$

d.h. wir erhalten mit Taylor-Entwicklung

$$\begin{aligned}
c_1(h) &= c_1(h)\big|_{h=0} + hc_1'(h)\big|_{h=0} + O(h^2) = 1 + O(h^2) \\
c_2(h) &= c_2(h)\big|_{h=0} + hc_2'(h)\big|_{h=0} + O(h^2) = O(h^2).
\end{aligned}$$

Aufgabe 16 *(Programmieraufgabe, Inhärente Instabilität)* (8 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = 10\left(y - \frac{x^2}{x^2+1}\right) + \frac{2x}{(x^2+1)^2}, \quad y(0) = 0$$

mit

a) dem Trapezregel-Verfahren,

b) dem impliziten Runge-Kutta-Verfahren aus Aufgabe 9 c) und

c) dem Adams-Bashforth-Verfahren
(Verwenden Sie für die Startwerte das klassische RK4, siehe Aufgabe 8).

Verwenden Sie für jedes Verfahren 1000 Schritte. Zeichnen Sie alle Lösungen gemeinsam mit der exakten Lösung $y(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ für $x \in [0, 3]$ in eine gemeinsame Grafik. Verwenden Sie `ylim([-1.5,1.5]);`.

Lösung

```
% Angewandte Numerik 2, WS 2013/2014
% Blatt 7, Aufgabe 16: Inhaerente Instabilitaet
%
% Loesungsvorschlag
%
% Hauptprogramm

clear all;
close all;

%% Initialisierungen

% Art der Berechnung der Startwerte des Adams-Bashforth-Verfahrens
% art = 1; % Startwerte exakt berechnen ueber y_exakt(.)
art = 2; % Startwerte mit klassischem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung ber.
% art = 3; % Startwerte mit dem expliziten Eulerverfahren berechnen

f = @(x,y) 10*(y-x.^2./(x.^2+1))+2*x./(1+x.^2).^2;   % Differentialgleichung
y0 = 0;                                              % Anfangswert

t0 = 0;                                              % Zeitintervall
tN = 3;

N = 1000;

y_exakt = @(x) x.^2./(1+x.^2);                       % exakte Loesung

%% Naeherungs-Loesungen mit 3 verschiedenen Verfahren

[yT,tT]=trapezregelVerfahren(f,t0,y0,tN,N,1e-10);
[yR,tR]=rungekuttaImplicit(f,t0,y0,tN,N,5);
[yA,tA]=adamsBashforthVerfahren(f,t0,y0,tN,N, art, y_exakt);

%% Plotten

tplot = linspace(t0,tN,1000);
plot(tplot, y_exakt(tplot),'r');
hold on
plot(tT, yT, 'b', tA, yA, 'm:', tR, yR, 'c--')

title('Inh‰rente␣Instabilit‰t:␣Verschiedene␣Verfahren', 'Fontsize', 14)
legend('exakte␣L^sung','Trapezregel-Verfahren', ...
    'Adams-Bashforth-Verfahren', 'Implizites␣Runge-Kutta-Verfahren')
xlabel('t')
ylabel('y')
ylim([-1.5,1.5])
```

```
% Angewandte Numerik 2, WS 2013/2014
% Blatt 7, Aufgabe 16: Inhaerente Instabilitaet
```

```
%
% Loesungsvorschlag
%
% Trapezregel-Verfahren
%
% Input:     f:    Differentialgleichung
%            ta:   Startzeitpunkt
%            ya:   Startwert
%            te:   Endzeitpunkt
%            N:    Anzahl Gitterpunkte bzw. Zeitschritte
%            tol:  relative Toleranz fuer Iterationsschleife
%
% Output:    y:    Naeherungswerte zu
%            t:    Zeitpunkte


function [y,t]=trapezregelVerfahren(f,ta,ya,te,N,tol)

%% Initialisierungen
 eps1=10^(-10);                    % Grenze fuer Abbruchkriterium

 h = (te-ta)/N;
 t = ta:h:te;                      % Gitter anlegen
 y = zeros(length(ya),N+1);        % die zu berechnenden Naeherungswerte
 y(:,1) = ya;                      % Startwert speichern


 %% Naeherungswerte berechnen
 for k=1:N                         % berechne alle y_k: y(:,2),...,y(:,N+1)
     y(:,k+1)=y(:,k);              % Startwert fuer die Iterationsschleife zur
                                   % Berechnung von y(:,k+1)
     iter = 1;
     while (1)                     % Berechnung von y(:,k+1)
       yalt=y(:,k+1);
       y(:,k+1) = y(:,k) + (h/2)*(f(t(k),y(:,k))+f(t(k+1),y(:,k+1)));
                                   % Abbruchkriterium der Iterationsschleife
       if(norm(y(:,k+1)-yalt)<=max(eps1,norm(yalt))*tol)
           break;
       end
       iter = iter+1;
     end
 end
end
```

```
% Angewandte Numerik 2, WS 2013/2014
% Blatt 7, Aufgabe 16: Inhaerente Instabilitaet
%
% Loesungsvorschlag
%
% Implizites Runge-Kutta-Verfahren
%
% Input:     f:    Differentialgleichung
%            ta:   Startzeitpunkt
%            ya:   Startwert zum Zeitpunkt ta
```

```
%               te:   Endzeitpunkt
%               N:    Anzahl Gitterpunkte bzw. Zeitschritte
%               M:    Anzahl Schritte des Iterationsverfahrens
%
% Output:       y:    Naeherungswerte zu
%               t:    Zeitpunkte


function [y,t]=rungekuttaImplicit(f,ta,ya,te,N,M)
 h=(te-ta)/N;
 h6=h/6;
 t = ta:h:te; % Gitter anlegen
 y=zeros(length(ya),N+1);
 y(:,1) = ya; % Startwert schreiben

 for i=1:N % durchlaufe Gitterpunkte
    %setze Startwerte fuer Iterationsverfahren
    k1=zeros(length(ya),1);
    k2=zeros(length(ya),1);
    %starte Iterationsverfahren
    for j=1:M
      k1alt=k1;  % alte Werte merken fuer Iteration
      k2alt=k2;
      k1=f(t(i),y(:,i)+h6*(k1alt-k2alt));
      k2=f(t(i)+h/2,y(:,i)+h6*(k1alt+2*k2alt));
    end
    k3=f(t(i)+h,y(:,i)+h6*(k1+5*k2));
    y(:,i+1)=y(:,i)+h6*(k1+4*k2+k3);
 end
end
```

```
% Angewandte Numerik 2, WS 2013/2014
% Blatt 7, Aufgabe 16: Inhaerente Instabilitaet
%
% Loesungsvorschlag
%
% Adams-Bashforth-Verfahren
%
% Input:        f:    Differentialgleichung
%               ta:   Startzeitpunkt
%               ya:   erster Startwert zum Zeitpunkt ta
%               te:   Endzeitpunkt
%               N:    Anzahl Gitterpunkte bzw. Zeitschritte
%               art:  Art, wie Startwerte berechnet werden
%                     art=1: Startwerte exakt
%                     art=2: Startwerte mit dem klassischen Runge-Kutta-V. 4.Ordnung
%                     art=3: Startwerte mit dem expliziten Euler
%               y_exakt:
%                     exakte Loesung zur Berechnung der Startwerte falls art==1
%
% Output:       y:    Naeherungswerte zu
%               t:    Zeitpunkte


```

```matlab
function [y,t]=adamsBashforthVerfahren(f,ta,ya,te,N, art, y_exakt)

%% Initialisierungen

 h=(te-ta)/N;
 t = ta:h:te;                      % Gitter anlegen
 y=zeros(length(ya),N+1);          % Speicher fuer die Naeherungswerte


 %% Berechnung der ersten 4 Startwerte: fj(:,j) und y(:,j), j=1,...,4

 % Startrechnung: fuer j=1 exakte Werte
 fj = zeros(length(ya),N+1);
 fj(:,1) = f(ta,ya);
 y(:,1) = ya;                          % erster Startwert speichern

 % Startwerte fuer j=2,...,4 berchnen
 switch art
   case 1              %exakte Werte als Startwere
     for j=1:3         %Achtung Indexverschiebung, muss Vektoren bei 1 starten
                       %y0=y(:,1) wurde oben schon belegt
       y(:,j+1)=y_exakt(t(j+1));
       fj(:,j+1)=f(t(j+1),y(:,j+1));
     end
   case 2              %Startwerte mit dem klassischen Runge-Kutta-V. 4.Ordnung
     for j = 1:3
       k1 = f(t(j),y(:,j));
       k2 = f(t(j)+h/2,y(:,j) + h/2*k1);
       k3 = f(t(j)+h/2,y(:,j) + h/2*k2);
       k4 = f(t(j+1),y(:,j) + h*k3);
       y(:,j+1) = y(:,j) + h*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6;
       fj(:,j+1) = f(t(j+1),y(:,j+1));
      end
   case 3              %Startwerte mit dem expliziten Euler
      for j = 1:3
           y(:,j+1) = y(:,j) + h*fj(:,j);    % expliziter Euler
           fj(:,j+1)=f(t(j+1),y(:,j+1));
      end
   otherwise
      error('Fuer den Parameter "art" gibt es nur die Moeglichkeiten 1-3.');
 end

%% Das eigentliche Adams-Bashforth-Verfahren

for j = 4:N
  y(:,j+1)  = y(:,j)+(h/24)*(55*fj(:,j)-59*fj(:,j-1)+37*fj(:,j-2)-9*fj(:,j-3));
  fj(:,j+1) =f(t(j+1),y(:,j+1));
end
```

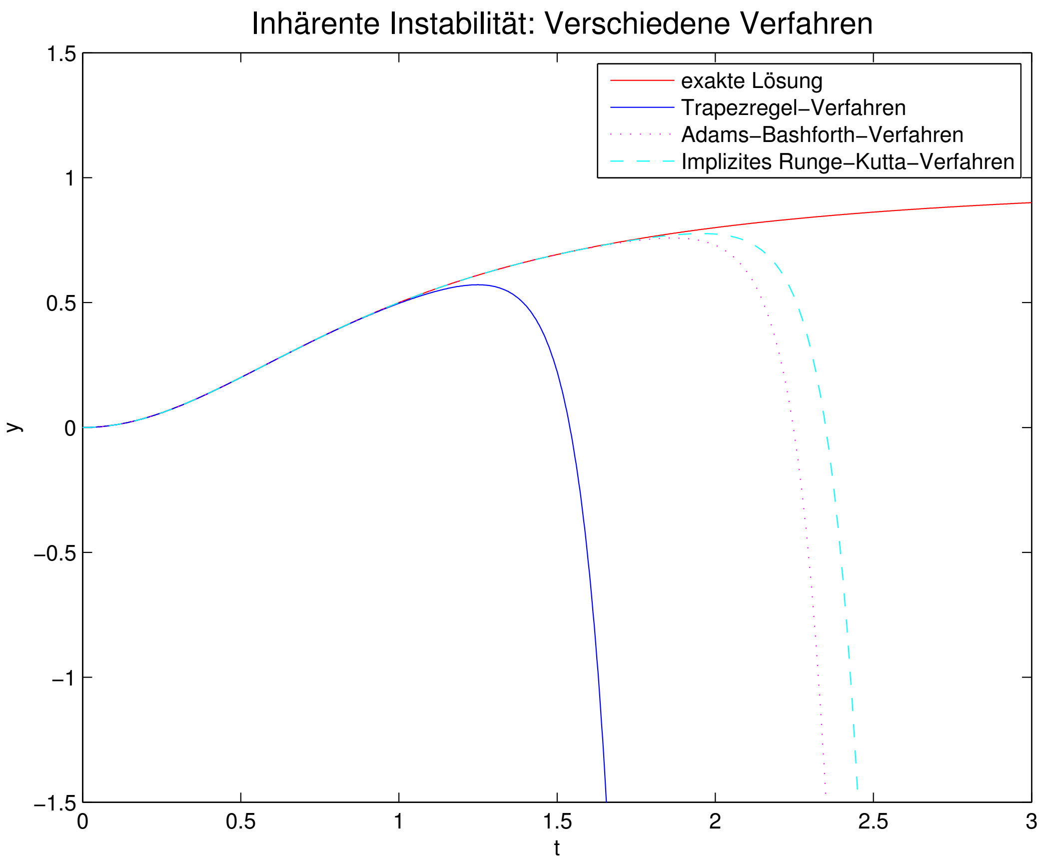

Abbildung 1: Verschiedene Verfahren bei inhärenter Instabilität