Prof. Dr. Stefan Funken
Dipl.-Math. Katharina Becker-Steinberger
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

WS 2013/2014
Lösungsblatt 8
10.01.2014

Angewandte Numerik 2

Aufgabe 17 *(Absolute Stabilität von Mehrschrittverfahren)* (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass die BDF-Methode

$$y_{j+2} - \frac{4}{3}y_{j+1} + \frac{1}{3}y_j = \frac{2}{3}hf(t_{j+2}, y_{j+2})$$

für alle $h\lambda$ mit $h > 0$ und $\lambda < 0$ absolut stabil ist.

Lösung:

Aus

$$y_{j+2} - \frac{4}{3}y_{j+1} + \frac{1}{3}y_j = \frac{2}{3}hf(t_{j+2}, y_{j+2})$$

erhält man die Koeffizienten

$$\alpha_2 = 1,\ \alpha_1 = -\frac{4}{3},\ \alpha_0 = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad \beta_2 = \frac{2}{3},\ \beta_1 = 0,\ \beta_0 = 0$$

und das erste

$$\rho(z) = z^2 - \frac{4}{3}z + \frac{1}{3}$$

sowie das zweite charakteristische Polynom

$$\sigma(z) = \frac{2}{3}z^2.$$

Damit lautet das Stabilitätspolynom

$$\begin{aligned}\pi(z) &= \rho(z) - h\lambda\,\sigma(z)\\ &= z^2 - \frac{4}{3}z + \frac{1}{3} - h\lambda\,\frac{2}{3}z^2\\ &= (1 - \frac{2}{3}h\lambda)z^2 - \frac{4}{3}z + \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Berechnung der Nullstellen des Stabilitätspolynoms:

$$\pi(z) = (1 - \frac{2}{3}h\lambda)z^2 - \frac{4}{3}z + \frac{1}{3} \overset{!}{=} 0.$$

Diese Gleichung besitzt die Lösungen

$$
\begin{aligned}
z_{1/2} = z_{1/2}(h\lambda) &= \frac{-(-\frac{4}{3}) \pm \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 4(1-\frac{2}{3}h\lambda)\frac{1}{3}}}{2\,(1-\frac{2}{3}h\lambda)} \\
&= \frac{\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{8}{9}h\lambda}}{2\,(1-\frac{2}{3}h\lambda)} \\
&= \frac{\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9}(1+2h\lambda)}}{\frac{2}{3}\,(3-2h\lambda)} \\
&= \frac{\frac{4}{3} \pm \frac{2}{3}\sqrt{1+2h\lambda}}{\frac{2}{3}\,(3-2h\lambda)} \\
&= \frac{2 \pm \sqrt{1+2h\lambda}}{(3-2h\lambda)}
\end{aligned}
$$

Sei jetzt $h > 0$ und $\lambda < 0$, also $h\lambda < 0$.

<u>1. Fall:</u> $-\frac{1}{2} < h\lambda < 0$
Dann gilt:

$$
\begin{array}{rrcccl}
 & -\frac{1}{2} & < & h\lambda & < & 0 \\
\Leftrightarrow & -1 & < & 2h\lambda & < & 0 \\
\Leftrightarrow & 0 & < & -2h\lambda & < & 1 \\
\Leftrightarrow & 3 & < & 3-2h\lambda & < & 4
\end{array}
$$

und

$$
\begin{array}{rrcccl}
 & -\frac{1}{2} & < & h\lambda & < & 0 \\
\Leftrightarrow & -1 & < & 2h\lambda & < & 0 \\
\Leftrightarrow & 0 & < & 1+2h\lambda & < & 1 \\
\Leftrightarrow & 0 & < & \sqrt{1+2h\lambda} & < & 1 \\
\Leftrightarrow & 2 & < & 2+\sqrt{1+2h\lambda} & < & 3 \\
\Rightarrow & z_1(h\lambda) & = & \frac{2+\sqrt{1+2h\lambda}}{3-2h\lambda} & < & \frac{3}{3} = 1
\end{array}
$$

Ferner folgt

$$
\begin{array}{rrcccl}
\Leftrightarrow & -1 & < & -\sqrt{1+2h\lambda} & < & 0 \\
\Leftrightarrow & 1 & < & 2-\sqrt{1+2h\lambda} & < & 2 \\
\Rightarrow & z_2(h\lambda) & = & \frac{2-\sqrt{1+2h\lambda}}{3-2h\lambda} & < & \frac{2}{3} \; < \; 1
\end{array}
$$

Damit gilt also im Fall $-\frac{1}{2} < h\lambda < 0$, dass $|z_{1/2}(h\lambda)| < 1$ ist.

<u>2. Fall:</u> $h\lambda \leq -\frac{1}{2}$
Dann gilt:

$$
\begin{array}{rrcl}
 & h\lambda & \leq & -\frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow & 2h\lambda & \leq & -1 \\
\Leftrightarrow & 1+2h\lambda & \leq & 0 \\
\Leftrightarrow & -(1+2h\lambda) & \geq & 0
\end{array}
$$

Damit gilt also $\sqrt{1+2h\lambda} = i\sqrt{-(1+2h\lambda)}$ und $\sqrt{-(1+2h\lambda)}$ ist reell.
Und daraus folgt

$$\begin{aligned}
|z_{1/2}(h\lambda)| &= \left|\frac{2 \pm \sqrt{1+2h\lambda}}{(3-2h\lambda)}\right| \\
&= \left|\frac{2}{(3-2h\lambda)} \pm \frac{\sqrt{1+2h\lambda}}{(3-2h\lambda)}\right| \\
&= \left|\frac{2}{(3-2h\lambda)} \pm i\frac{\sqrt{-(1+2h\lambda)}}{(3-2h\lambda)}\right| \\
&= \sqrt{\left(\frac{2}{(3-2h\lambda)}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-(1+2h\lambda)}}{(3-2h\lambda)}\right)^2}
\end{aligned}$$

Und damit

$$\begin{aligned}
& & |z_{1/2}(h\lambda)| &< 1 \\
&\Leftrightarrow & \sqrt{\left(\frac{2}{(3-2h\lambda)}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-(1+2h\lambda)}}{(3-2h\lambda)}\right)^2} &< 1 \\
&\Leftrightarrow & \left(\frac{2}{(3-2h\lambda)}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-(1+2h\lambda)}}{(3-2h\lambda)}\right)^2 &< 1 \\
&\Leftrightarrow & 2^2 + \sqrt{-(1+2h\lambda)}^2 &< (3-2h\lambda)^2 \\
&\Leftrightarrow & 4-(1+2h\lambda) &< 9-12h\lambda+4(h\lambda)^2 \\
&\Leftrightarrow & 0 &< \underbrace{\underbrace{6}_{>0} - \underbrace{10h\lambda}_{<0} + \underbrace{4(h\lambda)^2}_{>0}}_{>0} \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

Also gilt auch im Fall $h\lambda \leq -\frac{1}{2}$, dass $|z_{1/2}(h\lambda)| < 1$ ist.
Somit gilt also für alle $h > 0$ und $\lambda < 0$, dass $|z_{1/2}(h\lambda)| < 1$ ist.
Damit ist die angegebene BDF-Methode für alle $h > 0$ und $\lambda < 0$ absolut stabil. $\square$

Aufgabe 18 *(Stabilitätsfunktion von Einschrittverfahren)* (10 Punkte)

Gilt für die Näherungen y_j eines Einschrittverfahrens, angewendet auf die Testanfangswertaufgabe

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = 1, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

die Beziehung $y_{j+1} = g(h\lambda)y_j, j \in \mathbb{N}_0$, mit einer Funktion $g : D \to \mathbb{C}, 0 \in D \subset \mathbb{C}$, so heisst g die *Stabilitätsfunktion* des Verfahrens. Das Verfahren heisst *absolut stabil für* $h\lambda$, falls $|g(h\lambda)| < 1$ ist.

a) Berechnen Sie die Stabilitätsfunktion des expliziten Euler-Verfahrens.

b) Berechnen Sie die Stabilitätsfunktion des impliziten Euler-Verfahrens.

c) Zeigen Sie, dass für die Stabilitätsfunktion eines m-stufigen Runge-Kutta-Verfahrens mit Koeffizientenschema $\begin{array}{c|c} a & B \\ \hline & c^T \end{array}$ mit $\mathbf{e}_m = (1,1,\ldots,1)^T \in \mathbb{R}^m$ und $D := \{z \in \mathbb{C} \mid \det(I - zB) \neq 0\}$ für alle $z \in D$ gilt:

$$g(z) = 1 + zc^T(I - zB)^{-1}\mathbf{e}_m = \frac{\det(I - zB + z\mathbf{e}_m c^T)}{\det(I - zB)}.$$

Wie vereinfacht sich diese Formel für explizite Runge-Kutta-Verfahren?

Hinweis für das zweite Gleichheitszeichen von g(z):
Setzen Sie ein lineares Gleichungssystem aus dem K-Vektor des Runge-Kutta-Verfahrens und y_{j+1} an und berechnen Sie y_{j+1} mit Hilfe der Cramer'schen Regel.

Lösung:

a) explizites Euler-Verfahren:
Wenden wir das explizite Euler-Verfahren

$$y_{j+1} = y_j + hf(t_j, y_j)$$

auf die Differentialgleichung $y' = \lambda y$ an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= y_j + hf(t_j, y_j) \\ &= y_j + h\lambda y_j \\ &= (1 + h\lambda)\, y_j \\ &= g(\lambda h)\, y_j \end{aligned}$$

mit $g(\lambda h) = 1 + \lambda h$. Also ist $g(\lambda h) = 1 + \lambda h$ die Stabilitätsfunktion des expliziten Euler-Verfahrens.

b) implizites Euler-Verfahren:
Analog erhalten wir, wenn wir das implizite Euler-Verfahren

$$y_{j+1} = y_j + hf(t_{j+1}, y_{j+1})$$

auf die Differentialgleichung $y' = \lambda y$ anwenden:

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= y_j + hf(t_{j+1}, y_{j+1}) \\ &= y_j + h\lambda y_{j+1} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(1 - \lambda h)\, y_{j+1} = y_j$$

und damit

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= \frac{1}{1 - \lambda h}\, y_j \\ &= g(\lambda h)\, y_j \end{aligned}$$

mit $g(\lambda h) = \frac{1}{1-\lambda h}$. Also ist $g(\lambda h) = \frac{1}{1-\lambda h}$ die Stabilitätsfunktion des impliziten Euler-Verfahrens.

c) m-stufiges Runge-Kutta-Verfahren mit Koeffizientenschema $\begin{array}{c|c} a & B \\ \hline & c^T \end{array}$:
Seien b_{il} die Elemente der Matrix B und a_i bzw. c_i die Elemente des Vektors a bzw. c, also $B = (b_{il})_{i,l=1,\dots,m}, a = (a_1, \dots, a_m)^T, c = (c_1, \dots, c_m)^T$, sowie $\mathbf{e}_m = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^m$.
Für das m-stufige Runge-Kutta-Verfahren gilt

$$y_{j+1} = y_j + h \sum_{i=1}^{m} c_i k_i = y_j + h\, c^T k \tag{1}$$

mit

$$k_i = f(t_j + a_i h, y_j + h \sum_{l=1}^{m} b_{il} k_l).$$

Die Anwendung auf die Differentialgleichung $y' = \lambda y$ liefert für $i = 1, \ldots, m$

$$\begin{aligned} k_i &= f(t_j + a_i h, y_j + h \sum_{l=1}^{m} b_{il} k_l) \\ &= \lambda\,(y_j + h \sum_{l=1}^{m} b_{il} k_l) \\ &= \lambda\, y_j + \lambda h \sum_{l=1}^{m} b_{il} k_l. \end{aligned}$$

Für alle $i = 1, \ldots, m$ gilt also

$$k_i - \lambda h \sum_{l=1}^{m} b_{il} k_l = \lambda\, y_j.$$

Schreiben wir diese m Gleichungen als Gleichungssystem, so erhalten wir

$$\begin{array}{ccccc} k_1 & - & \lambda h \sum_{l=1}^{m} b_{1l} k_l & = & \lambda\, y_j \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_m & - & \lambda h \sum_{l=1}^{m} b_{ml} k_l & = & \lambda\, y_j. \end{array}$$

Mit $k = (k_1, \ldots, k_m)^T$ ergibt sich in Matrixschreibweise

$$I\,k - \lambda h\, B\, k = \lambda\, \mathbf{e}_m\, y_j,$$

und damit

$$(I - \lambda h\, B)\, k = \lambda\, \mathbf{e}_m\, y_j. \tag{2}$$

Wir erhalten also für k

$$k = (I - \lambda h\, B)^{-1}\, \lambda\, \mathbf{e}_m\, y_j.$$

Setzen wir dies in (1) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= y_j + h\, c^T k \\ &= y_j + h\, c^T (I - \lambda h\, B)^{-1}\, \lambda\, \mathbf{e}_m\, y_j \\ &= (1 + \lambda h\, c^T (I - \lambda h\, B)^{-1}\, \mathbf{e}_m)\, y_j \\ &= g(\lambda h)\, y_j \end{aligned} \tag{3}$$

mit $g(\lambda h) = 1 + \lambda h\, c^T (I - \lambda h\, B)^{-1}\, \mathbf{e}_m$.
Also ist $g(\lambda h) = 1 + \lambda h\, c^T (I - \lambda h\, B)^{-1}\, \mathbf{e}_m$ die Stabilitätsfunktion des m-stufigen Runge-Kutta-Verfahrens mit Koeffizientenschema $\begin{array}{c|c} a & B \\ \hline & c^T \end{array}$.
Setze nun $z := \lambda h$. Aus Gleichung (1) erhalten wir

$$-h\, c^T k + y_{j+1} = y_j$$

bzw.

$$-z\, c^T k + \lambda y_{j+1} = \lambda y_j.$$

Damit und aus Gleichung (2) erhalten wir das Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} I - z\, B & 0 \\ -z\, c^T & \lambda \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} k \\ y_{j+1} \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda y_j \mathbf{e}_m \\ \lambda y_j \end{pmatrix}}_{b}.$$

Mit der Cramer'schen Regel folgt für y_{j+1}

$$y_{j+1} = \frac{\det\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{\det\begin{pmatrix} I - z\,B & \lambda y_j \mathbf{e}_m \\ -z\,c^T & \lambda y_j \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} I - z\,B & 0 \\ -z\,c^T & \lambda \end{pmatrix}}.$$

Für den Zähler erhalten wir:

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} I - z\,B & \lambda y_j \mathbf{e}_m \\ -z\,c^T & \lambda y_j \end{pmatrix} &= \lambda y_j \det\begin{pmatrix} I - z\,B & \mathbf{e}_m \\ -z\,c^T & 1 \end{pmatrix} \\ &\overset{(1)}{=} \lambda y_j \det\begin{pmatrix} I - z\,B + z\mathbf{e}_m c^T & 0 \\ -z\,c^T & 1 \end{pmatrix} \\ &\overset{(2)}{=} \lambda y_j \det\left(I - z\,B + z\mathbf{e}_m c^T\right). \end{aligned}$$

Dabei haben wir bei (1) von den ersten m Zeilen der Matrix jeweils die letzte Zeile subtrahiert und bei (2) den Laplace'schen Entwicklungssatz angewendet.

Ebenfalls mit dem Laplace'schen Entwicklungssatz ergibt sich für den Nenner

$$\det\begin{pmatrix} I - z\,B & 0 \\ -z\,c^T & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \det\left(I - z\,B\right).$$

Zusammensetzen liefert

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= \frac{\det\begin{pmatrix} I - z\,B & \lambda y_j \mathbf{e}_m \\ -z\,c^T & \lambda y_j \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} I - z\,B & 0 \\ -z\,c^T & \lambda \end{pmatrix}} \\ &= \frac{\lambda y_j \det\left(I - z\,B + z\mathbf{e}_m c^T\right)}{\lambda \det\left(I - z\,B\right)} \\ &= y_j \frac{\det\left(I - z\,B + z\mathbf{e}_m c^T\right)}{\det\left(I - z\,B\right)}. \end{aligned}$$

Mit Gleichung (3), $y_{j+1} = g(\lambda h)\, y_j$, folgt

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{y_j}\, y_{j+1} \\ &= \frac{1}{y_j}\, y_j \frac{\det\left(I - z\,B + z\mathbf{e}_m c^T\right)}{\det\left(I - z\,B\right)} \\ &= \frac{\det\left(I - z\,B + z\mathbf{e}_m c^T\right)}{\det\left(I - z\,B\right)}. \end{aligned}$$

Beim expliziten Runge-Kutta-Verfahren gilt für die Verfahrensmatrix B $b_{ij} = 0$ für alle $i \leq j$. B ist also eine untere Dreiecksmatrix, bei der die Hauptdiagonale aus 0 besteht. Daher ist $I - zB$ eine untere Dreiecksmatrix mit nur 1 auf der Hauptdiagonalen.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \det(I - zB) = 1 \\ &\Rightarrow \quad g(z) = \det(I - zB + ze_m c^T). \end{aligned}$$

□