Prof. Dr. Stefan Funken
Dipl.-Math. Katharina Becker-Steinberger
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

WS 2013/2014
Blatt 9
20.12.2013

Angewandte Numerik 2

Abgabetermin: Freitag 10.01.2014, **vor der Übung**

Aufgabe 19 *(Theorie und Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen)* (12+2* Punkte)

a) *(Zusatzaufgabe, 2 Zusatzpunkte)*
Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit ein Anfangswertproblem (AWP)

$$y'(t) = f\left(t, y(t)\right), \quad t \in [t_0, T], \quad y(t_0) = y^0 \tag{1}$$

korrekt gestellt heißt?

b) Formulieren Sie das folgende skalare Anfangswertproblem 3-ter Ordnung in ein äquivalentes System erster Ordnung um:

$$\begin{aligned} y'''(t) &= 5y''(t) - y'(t) - 2\left(y(t)\right)^2 + 3\mathrm{e}^{2t}, \quad t \in [0, T] \\ y(0) &= 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0 \end{aligned}$$

c) Der Satz von Picard-Lindelöf liefert Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von AWP (1). Welche Voraussetzungen müssen hierfür erfüllt sein? Existiert für das AWP aus Teilaufgabe 19b) eine eindeutige Lösung? (Mit Begründung)

d) Zur numerischen Lösung von AWPen haben Sie in der Vorlesung die Trapezregel kennen gelernt. Skizzieren Sie die Idee/Herleitung dieses Verfahrens und beschreiben Sie den Algorithmus mit Hilfe eines Pseudo-Codes.

e) Die Verfahrensfunktion eines Einschrittverfahrens $y_{j+1} = y_j + h\Phi(t_j, y_j, h)$ sei gegeben durch

$$\Phi(t, y, h) = f(t, y) + \frac{h}{2} g(t + ch, y + chf(t, y))$$

mit $g(t, y) := f_t(t, y) + f_y(t, y)f(t, y)$. Zeigen Sie, dass man für alle Parameter c ein Verfahren der Konsistenzordnung (mindestens) zwei und für einen speziellen Parameter c (welchen?) sogar ein Verfahren der Konsistenzordnung (mindestens) drei erhält.

f) Was ist ein Mehrschrittverfahren und wozu dient es? Geben Sie das Adams-Bashforth Verfahren für $k = 1$ (Euler-Verfahren) wieder und zeigen Sie, dass es von der Ordnung 1 ist.

g) Implizite Mehrschrittverfahren erreichen bei gleicher Schrittzahl oft eine höhere Konvergenzordnung als explizite Verfahren. Welche Probleme ergeben sich beim impliziten Verfahren im Gegensatz zu expliziten Verfahren, und wie können diese Probleme beseitigt werden?

Lösung:

a) Ein Problem heißt *korrekt gestellt* (nach Hadamard), falls

1.) eine Lösung existiert,
2.) diese Lösung eindeutig ist und
3.) stetig von den Daten abhängt.

Nach dem *Satz von Peano* (vgl. Skript Satz 15) existiert bereits unter sehr schwachen Anforderungen an die rechte Seite f , nämlich Stetigkeit in t und y , eine Lösung, zumindest für kleine Zeitintervalle. Allerdings sagt der Satz nichts über die Eindeutigkeit der Lösung aus! Um die Eindeutigkeit einer Lösung zu garantieren muss der Stetigkeitsbegriff verstärkt werden (siehe Teil c))

b) Mit den Definitionen $y_1(t) := y(t),\ y_2(t) = y'(t),\ y_3(t) = y''$ ergibt sich das äquivalente System erster Ordnung:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ 5y_3 - y_2 - 2y_1^2 + 3e^{2t} \end{pmatrix}$$

mit Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Nach Satz 18 aus dem Skript muss gelten:

1.) f stetig in (t, y) auf dem Kompaktum $D = \{(t, y) | \, |t - a| \leq \alpha, \|y - y_0\| \leq \beta\}$ und

2.) f Lipschitz-stetig in y, d.h. für beliebig festes $t \in [t_0, T]$ existiert eine Lipschitz-Konstante $L \in \mathbb{R}$ mit

$$\|f(t, \hat{y}) - f(t, \tilde{y})\| \leq L\|\hat{y} - \tilde{y}\| \quad \forall\, \hat{y}, \tilde{y}. \tag{2}$$

Für das gegebene AWP gilt: f ist *stetig differenzierbar* in y (also im zweiten Argument) und somit Lipschitz-stetig in y. Also ist der *Satz von Picard-Lindelöf* anwendbar und somit besitzt das AWP eine eindeutige Lösung.

d) Integriert man die Lösung einer Differentialgleichung $y'(t) = f(t, y(t))$, auf einem Teilintervall $[t, t+h]$ so folgt:

$$y(t+h) = y(t) + [y(t+h) - y(t)] = y(t) + \int_t^{t+h} y'(s)ds = y(t) + \int_t^{t+h} f(s, y(s))ds$$

Das Integral kann über die Trapezregel angenähert werden. Dies gilt für beliebige Intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ mit Intervalllänge h. Sei $y_k = y(t_k)$. Ein Schritt $y_k \to y_{k+1}$ hat dann die Form

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(f(t, y_k) + f(t+h, y_{k+1})\right).$$

Pseudo-Code:

0. Gegeben: Schrittweite $h = \frac{T - t_0}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$, Startwert $y(t_0) = y_0$.

1. Für $j = 0, \ldots, n-1$:
   Berechne Schritt und Funktionswert gemäß

$$\begin{aligned} t_{j+1} &= t_j + h, \\ y_{j+1} &= y_j + \frac{h}{2}(f(t_j, y_j) + f(t_{j+1}, y_{j+1})). \end{aligned} \tag{3}$$

Bemerkung: (3) ist eine implizite Gleichung. D.h. der angegebene Pseudo-Code ist so nicht implementierbar. Gleichung (3) kann z.B. durch eine zusätzliche Fixpunktiteration gelöst werden. Wir erhalten folgende Variante des Pseudo-Codes mit einer zu spezifizierenden Konvergenzbedingung:

0. Gegeben: Schrittweite $h = \frac{T-t_0}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$, Startwert $y(t_0) = y_0$.

1. Für $j = 0, \dots, n-1$:
   Berechne Schritt

   $$t_{j+1} = t_j + h.$$

   a) Setze $y^{(0)} = y_j$.
   b) Fixpunktiteration:
      Berechne Funktionswert

      $$y_{j+1}^{(n+1)} = y_j + \frac{h}{2}(f(t_j, y_j) + f(t_{j+1}, y_{j+1}^{(n)})).$$

   c) Prüfe Konvergenzbedingung:
      Falls eine geeignete Konvergenzbedingung erfüllt ist setze $y_{j+1} = y_{j+1}^{(n+1)}$ und gehe zu Schritt 1. Sonst setze $n = n+1$ und gehe zu Schritt b).

e) Ein Verfahren hat die Konstistenzordnung p, wenn

$$d_{j+1} = y(t_{j+1}) - y(t_j) - hf(t_j, y(t_j)) = \mathcal{O}(h^{p+1}).$$

Zum Bestimmen der Ordnung eines gegebenen Einschrittverfahrens vergleicht man die Taxlorentwicklung der Verfahrensfunktion $\Phi(t, y, h)$ bzgl. h (Entwicklungspunkt $h_0 = 0$) mit der entsprechenden Taylor-Entwicklung der exakten Fortschreiterichtung $(y(t_{j+1}) - y(t_j)))/h$.

Gesucht ist also die Taylor-Entwicklung von Φ bzgl. h an der Stelle h_0:

$$\Phi(t, y, h) = \Phi(t, y, h_0) + (h - h_0)\frac{d\Phi}{dh}(t, y, h_0) + \frac{(h-h_0)^2}{2}\frac{d\Phi^2}{dh^2}(t, y, h_0) + O^3(h - h_0).$$

für $h_0 = 0$ ergibt sich

$$\Phi(t, y, h) = \Phi(t, y, h_0)\mid_{h_0=0} + h\frac{d\Phi}{dh}(t, y, h_0)\mid_{h_0=0} + \frac{h^2}{2}\frac{d\Phi^2}{dh^2}(t, y, h_0)\mid_{h_0=0} + O^3(h).$$

Bei der Entwicklung der Verfahrensfunktion müssen wir die Kettenregel beachten. Wir betrachten im Folgenden die Terme der Entwicklung einzeln.

Für die Verfahrensfunktion Φ ausgewertet an der Stelle $h_0 = 0$ gilt

$$\Phi(t, y, h_0)\mid_{h_0=0} = f(t, y),$$

wenn wir die Argumente (t, y) weggelassen ergibt sich kurz

$$\Phi(h_0 = 0) = f.$$

Im folgenden lassen wir, der Übersichtlickeit und Kürze halber, stets die Argumente (t, y) weg.

$$\begin{aligned}
\frac{d\Phi}{dh} &= \frac{1}{2}g(...) + \frac{h_0}{2}\left(cg_t(...) + cg_y(...)f\right) \\
\frac{d\Phi}{dh}(h_0 = 0) &= \frac{1}{2}\left(f_t + f_y f\right) \\
\frac{d^2\Phi}{dh^2} &= c\left(g_t(...) + g_y(...)f\right) + \frac{c^2 h_0}{2}\left(g_{tt}(...) + 2g_{yt}(...)f + g_{yy}f^2\right) \\
\frac{d^2\Phi}{dh^2}(h_0 = 0) &= c(g_t + g_y f) \\
&= c\left[(f_{tt} + f_{yt}f + f_y f_t) + \left(f_{ty} + f_{yy}f + f_y^2\right)f\right] \\
&= c\left[f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2 + f_y f_t + f_y^2 f\right]
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$\Phi = f + \frac{h}{2}(f_t + f_y f) + \frac{ch^2}{2}\left[f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2 + f_y f_t + f_y^2 f\right] + O(h^3)$$

Außerdem gilt (zu den Details vgl. Aufgabenteil f))

$$y(t_{j+1}) - y(t_j) = hf + \frac{h^2}{2}(f_t + f_y f) + \mathcal{O}(h^3)$$

Für alle $c \in \mathbb{R}$ stimmt die Entwicklung der Verfahrensfunktion mit der Taylor-Entwicklung von $(y(t_{j+1}) - y(t_j))/h$ bis auf $O(h^2)$ überein, für $c = \frac{1}{3}$ sogar bis auf $O(h^3)$. Oder wenn wir den lokalen Diskretisierungsfehler betrachten

$$\begin{aligned} d_{j+1} &= y(t_{j+1}) - y(t_j) - h\Phi(t_j, y(t_j), h) \\ &= hf + \frac{h^2}{2}(f_t + f_y f) + \mathcal{O}(h^3) \\ &\quad - h\left(f + \frac{h}{2}(f_t + f_y f) + \frac{ch^2}{2}\left[f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2 + f_y f_t + f_y^2 f\right] + O(h^3)\right) \\ &= \frac{ch^3}{2}\left[f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2 + f_y f_t + f_y^2 f\right] + O(h^4) \end{aligned}$$

Somit hat das Verfahren für alle c die Konsitenzordnung $p = 2$ und mit $c = \frac{1}{3}$ sogar die Ordnung $p = 3$.

f) Ein Mehrschrittverfahren ist ein Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung von Funktionswerten einer durch eine AWA (siehe a)) implizit gegebenen Funktion $y = y(x)$. Hierbei werden bei einem k-Schrittverfahren die Näherungen $y_j, \dots, y_{j+k-1}$ zur Berechnnung der neuen Näherung y_{j+k} verwendet. Ein Mehrschrittverfahren hat die Gestalt

$$\sum_{l=0}^{k} \alpha_l y_{j+l} = h\phi(t_j, y_j, \dots, y_{j+k}, h, f), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

mit Verfahrensfunktion ϕ. Im linearen Fall hat die Verfahrensfunktion die Form

$$\phi(t_j, y_j, \dots, y_{j+k}, h, f) = \sum_{l=0}^{k} \beta_l f(t_{j+l}, y_{j+l}), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Das Verfahren von *Adams-Bashforth* lautet

$$y_{j+k} = y_{j+k-1} + h\sum_{i=0}^{k-1} \beta_i^{(k-1,0)} f_{j+i}$$

im Fall $k = 1$ reduziert es sich auf das explizite Euler-Verfahren. Das explizite Euler-Verfahren ist durch $k = 1, \alpha_0 = -1, \alpha_1 = -1, \beta_0 = 1$ und $\beta_1 = 0$ gegeben und hat die Gestalt

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j).$$

Um zu zeigen, dass die Ordnung des expliziten Euler-Verfshrens 1 ist, müssen wir zeigen, dass der lokale Fehler d_{j+1}

$$d_{j+1} = y(t_{j+1}) - y(t_j) - hf(t_j, y(t_j)) = \mathcal{O}(h^{p+1})$$

mit $p = 1$ erfüllt. Taylorentwicklung der unbekannten Funktion y liefert

$$\begin{aligned} y(t+h) - y(t) &\overset{Taylor}{=} \left(y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2}z''(t) + \mathcal{O}(h^3) - y(t)\right) \\ &= hy'(t) + \frac{h^2}{2}y''(t) + \mathcal{O}(h^3) \\ &\overset{y'=f(t,y)}{=} hf(t,y) + \frac{h^2}{2}(f_t(t,y) + f_y(t,y)f(t,y)) + \mathcal{O}(h^3) \\ &= hf + \frac{h^2}{2}(f_t + f_y f) + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned}$$

Es gilt $\phi(t,y) = f(t,y) = f$. Da wir ein äquidistantes Gitter betrachten, reicht es d_{j+1} für ein beliebiges $j+1$ zu betrachten.

$$\begin{aligned} d_{j+1} &= y(t_{j+1}) - y(t_j) - h\phi(t_j, y(t_j)) \\ &= y(t_j + h) - y(t_j) - h\phi(t_j, y(t_j)) \\ &= hf + \frac{h^2}{2}(f_t + f_y f) + \mathcal{O}(h^3) - hf \\ &= \frac{h^2}{2}(f_t + f_y f) + \mathcal{O}(h^3) = \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

Das Verfahren hat somit die Ordnung $p = 1$.

g) Zur Lösung der Aufgabe müssen implizite Gleichungen gelöst werden, wenn die DGL nichtlinear ist. Dies wird durch den Einsatz eines Prädiktor-Korrektor-Verfahrens umgangen.

Aufgabe 20 *(Multiple Choice, Zusatzaufgabe)* (4* Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Markieren Sie dies bitte eindeutig. Für jede richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt. Bei einer falschen Antwort wird Ihnen **ein** Punkt abgezogen. Insgesamt gibt es keine negativen Punkte.

	wahr	falsch
1. Ein Schritt des impliziten Euler-Verfahrens hat höheren Rechenaufwand als ein Schritt des expliziten Euler-Verfahrens.	⊗	○
2. Ein n-stufiges Runge-Kutta-Verfahren hat die Ordnung n.	○	⊗
3. Ein n-stufiges explizites Runge-Kutter-Verfahren benötigt pro Schritt $n-1$ Funktionsauswertungen.	○	⊗
4. Zu zwei Schrittweiten h_1, h_2 seien e_1 und e_2 die entsprechenden globalen Diskretisierungsfehler eines Einschrittverfahrens. In einem `loglog(h,e)`- Plot entspricht die Steigung der Geraden der Konvergenzordnung α.	⊗	○

Aufgabe 21 *(Richtig oder Falsch)* (6 Punkte)

Richtig oder Falsch: Geben Sie für folgende Aussagen an, ob sie wahr oder falsch sind. Begründen sie ihre Wahl kurz.

a) Das Mehrschrittverfahren

$$y_{j+1} = -2y_j + y_{j-1} + 3hf(y_j, t_j).$$

Ist konvergent.

b) Alle konsistenten 2-Schrittverfahren der Form

$$y_{j+1} = y_j + h \sum_{i=0}^{1} b_i f(y_{i+j}, t_{i+j})$$

sind konvergent.

Lösung:

a) Falsch. Notwendige Bedingung z.B.: $\sum \alpha_i = 0$ nicht erfüllt (hier $\sum \alpha_i = 1 + 2 - 1 = 2$).

b) Richtig. Konsistenz ist gegeben, also benötigen wir noch die Nullstabilität, um Konvergenz zu erhalten. Die angegebenen Verfahren sind Nullstabil, denn die Wurzelbedingung ist erfüllt: $\rho(z) = z^2 - z = 0$ hat die einfachen Nullstellen $z_1 = 1$ und $z_2 = 0$.

Aufgabe 22 *(Steife Differentialgleichungen)* (8 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem $y'(t) = Ay(t)$, $y(0) = y_0$ mit $A = \begin{pmatrix} 998 & 1998 \\ -999 & -1999 \end{pmatrix}$ und $y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Wie lautet die exakte Lösung?

b) Was ergibt das explizite Euler-Verfahren? Was folgt für die Schrittweite?
(Hinweis: Diagonalisieren Sie A mit den Ergebnissen aus Aufgabenteil a) und stellen Sie damit das sich mit dem expliziten Euler-Verfahren ergebende y_{k+1} in Abhängigkeit von y_0 dar. Leiten Sie daraus Forderungen an die Schrittweite ab.)

c) Welche Lösung liefert das implizite Euler-Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1})?$$

Warum unterliegt dieses Verfahren keiner Schrittweitenbeschränkung?

Lösung:

a) *Exakte Lösung:*
Wir berechnen die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -1000$ von A und die zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Fundamentallösungen zur DGL sind also gegeben durch:

$$y_1 = e^{\lambda_1 t} \cdot v_1 = e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y_2 = e^{\lambda_2 t} \cdot v_2 = e^{-1000t} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung lautet also:

$$y(t) = c_1 \cdot e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{-1000t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit noch zu bestimmenden Konstanten c_1, c_2. Einsetzen der Anfangsbedingungen liefert dann die Konstanten

$$y(0) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = y_0 \iff \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies c_1 = c_2 = 1.$$

Die exakte Lösung lautet also: $\quad y(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-1000t} \\ -e^{-t} + e^{-1000t} \end{pmatrix}.$

b) *Expliziter Euler:*
Bemerkung: Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *diagonalisierbar*, wenn es eine invertierbare Matrix $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt, so dass $V^{-1}AV = D$ mit $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ gilt. In den Spalten von V stehen dann die Eigenvektoren von A und auf der Diagonalmatrix D stehen auf der diagonalen die Eigenwerte von A als Einträge.

Mit Aufgabenteil a) erhalten wir

$$V = (v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1000 \end{pmatrix}.$$

und mit

Die Eigenvektoren v_1, v_2 bilden eine Basis aus Eigenvektoren. Daher ist V invertierbar mit

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Somit

können wir A darstellen als $A = VDV^{-1}$.

Wegen $f(t, y(t)) = Ay(t)$ folgt für das explizite Euler-Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k) = y_k + hAy_k$$

Induktiv folgt

$$y_{k+1} = y_k + hAy_k = (I + hA)y_k = (I + hA)^2 y_{k-1} = \cdots = (I + hA)^k y_0 = (I + hVDV^{-1})^k y_0$$

Wir beweisen zunächst einen Hilfsatz für die Potenz der Diagonaldarstellung:

Satz (Matrixpotenz) Sei A diagonalisierbar, und V invertierbar, D eine Diagonalmatrix mit $V^{-1}AV = D$, $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $A^k = VD^kV^{-1}$.

Beweis.

$$V^{-1}AV = D \quad \iff \quad A = VDV^{-1}$$

und daher

$$A^k = (VDV^{-1})^k = \underbrace{VD\underbrace{V^{-1}V}_{=I}D\underbrace{V^{-1}V}_{=I}DV^{-1}\cdots VDV^{-1}}_{k\text{-mal}} = VD^kV^{-1}.$$

$\square$

Mit dem Satz erhalten wir:

$$(I+hA)^k = (I+hVDV^{-1})^k = V(I+hD)^kV^{-1} = V\begin{pmatrix}(1-h)^k & 0\\ 0 & (1-1000h)^k\end{pmatrix}V^{-1}.$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= (I+h\cdot A)^k\cdot y_0 = \begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}(1-h)^k & 0\\ 0 & (1-1000h)^k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\\ &= \ldots = (1-h)^k\cdot\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix} - (1-1000h)^k\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Um das gleiche Verhalten wie für die exakte Lösung zu erhalten, muss gelten

$$|1-h| < 1 \quad \text{und} \quad |1-1000h| < 1,$$

also insgesamt: $h < \frac{1}{500}$, denn für die exakte Lösung gilt:

$$y(t) = \begin{pmatrix}2e^{-t} - e^{-1000t}\\ -e^{-t} + e^{-1000t}\end{pmatrix} \xrightarrow{t\to\infty} \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

c) *Impliziter Euler:*

$$y_{k+1} = y_k + hAy_{k+1} \quad \Longrightarrow \quad (I-hA)y_{k+1} = y_k \quad \Longrightarrow \quad y_{k+1} = (I-hA)^{-1}y_k$$

Also gilt induktiv wieder:

$$y_{k+1} = (I-hA)^{-1}\cdot y_k = (I-hA)^{-2}y_{k-1} = \ldots = (I-hA)^{-k}y_0.$$

Betrachte analog wie beim expliziten Verfahren: $(I-hA)^{-k} = V(I-hD)^{-k}V^{-1}$
Somit gilt:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= \ldots = (1+h)^{-k}\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix} - (1+1000h)^{-k}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}\\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{1+h}\right)^k}_{<1}\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix} - \underbrace{\left(\frac{1}{1+1000h}\right)^k}_{<1}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Beim impliziten Euler-Verfahren benötigt man also keine Bedingung an die Schrittweite h.