Prof. Dr. Stefan Funken
Dipl.-Math. Katharina Becker-Steinberger
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

WS 2013/2014
Lösungsblatt 10
17.01.2014

Angewandte Numerik 2

Aufgabe 23 *(Finite Elemente Methode in 1D)* (8 Punkte)

Gegeben sei die Gleichung

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), \quad x \in \Omega = (0,1), \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die explizite Lösung dieser Gleichung für

a) $f(x) = 1$,

b) $f(x) = sin(\pi x)$ und

c) $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$

Hinweis:
Verwenden Sie jeweils einen polynomialen Ansatz für die Funktionen u_1 und u_2 mit
$u(x) = \begin{cases} u_1(x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ u_2(x), & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$
Bestimmen Sie die Koeffizienten der beiden Polynome aus den notwendigen Bedingungen an u, u' und u'' (u. a. Stetigkeit von u und u').

Lösungsvorschlag:

a) $f(x) = 1$:

i) Ansatz:
u Polynom mit den bekannten Nullstellen 0 und 1 (da $u(0) = u(1) = 0$), also

$$u(x) = a\,x\,(x-1), a \in \mathbb{R}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} u(x) &= a\,x\,(x-1) = a\,(x^2 - x), \\ u'(x) &= a\,(2x-1) \quad \text{und} \\ u''(x) &= 2a. \end{aligned}$$

Mit $2a = u''(x) = -f(x) = -1$ folgt:

$$a = -\frac{1}{2}.$$

ii) Lösung:
Die gesuchte Lösung lautet also:

$$\begin{aligned} u(x) &= a\,(x^2 - x), \\ &= -\frac{1}{2}\,(x^2 - x), \\ &= -\frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{2}\,x. \end{aligned}$$

b) $f(x) = sin(\pi x)$:

i) Ansatz:

$$u(x) = a\,sin(\pi x), a \in \mathbb{R}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} u'(x) &= a\,\pi cos(\pi x) \quad \text{und} \\ u''(x) &= -a\,\pi^2 sin(\pi x). \end{aligned}$$

Mit $-a\,\pi^2 sin(\pi x) = u''(x) = -f(x) = -sin(\pi x)$ folgt:

$$a = \frac{1}{\pi^2}.$$

ii) Lösung:
Die gesuchte Lösung lautet also:

$$\begin{aligned} u(x) &= a\,sin(\pi x), \\ &= \frac{1}{\pi^2}\,sin(\pi x). \end{aligned}$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases} \tag{1}$$

i) Ansatz:

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ u_2(x), & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

mit jeweils einem polynomialem Ansatz für die Funktionen u_1 und u_2, also

$$u_1(x) = a_1 x^2 + b_1 x + c_1, \quad a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R} \tag{2}$$
$$u_2(x) = a_2 x^2 + b_2 x + c_2, \quad a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Dann gilt:

$$u_1'(x) = 2\,a_1 x + b_1,$$
$$u_1''(x) = 2\,a_1, \tag{4}$$
$$u_2'(x) = 2\,a_2 x + b_2 \quad \text{und}$$
$$u_2''(x) = 2\,a_2. \tag{5}$$

Mit (4) und (1) folgt auf dem linken Intervall $[0, \frac{1}{2}] : 2\,a_1 = u_1''(x) = -f(x) = -2$, also

$$a_1 = -1,$$

sowie mit (5) und (1) auf dem rechten Intervall $(\frac{1}{2}, 1] : 2\,a_2 = u_2''(x) = -f(x) = -1$, also

$$a_2 = -\frac{1}{2}.$$

Mit der Randbedingung $u(0) = 0$ und (2) folgt: $0 = u(0) = u_1(0) = c_1$, also

$$c_1 = 0,$$

sowie mit der Randbedingung $u(1) = 0$ und (3): $0 = u(1) = u_2(1) = a_2 1^2 + b_2 1 + c_2 = -\frac{1}{2} + b_2 + c_2$, also

$$c_2 = \frac{1}{2} - b_2. \tag{6}$$

Aufgrund der Stetigkeit von u muss gelten:

$$\begin{aligned}
& u_1\left(\frac{1}{2}\right) = u_2\left(\frac{1}{2}\right) \\
\Leftrightarrow \quad & a_1\left(\frac{1}{2}\right)^2 + b_1\,\frac{1}{2} + c_1 = a_2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + b_2\,\frac{1}{2} + c_2 \\
\Leftrightarrow \quad & -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + b_1\,\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + b_2\,\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - b_2 \\
\Leftrightarrow \quad & -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}b_1 = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{4} + \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{2} - b_2 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{2}b_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}b_2 - b_2 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{2}b_1 = \frac{5}{8} - \frac{1}{2}b_2 \\
\Leftrightarrow \quad & b_1 = \frac{5}{4} - b_2
\end{aligned} \tag{7}$$

Analog folgt mit der Stetigkeit von u':

$$\begin{aligned}
& u_1'\left(\frac{1}{2}\right) = u_2'\left(\frac{1}{2}\right) \\
\Leftrightarrow \quad & 2\,a_1\,\frac{1}{2} + b_1 = 2\,a_2\,\frac{1}{2} + b_2 \\
\Leftrightarrow \quad & a_1 + b_1 = a_2 + b_2 \\
\Leftrightarrow \quad & -1 + \frac{5}{4} - b_2 = -\frac{1}{2} + b_2 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{3}{4} = 2\,b_2 \\
\Leftrightarrow \quad & b_2 = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

Einsetzen in (6) und (7) liefert

$$c_2 = \frac{1}{2} - b_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$$

und

$$b_1 = \frac{5}{4} - b_2 = \frac{5}{4} - \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

Damit ergibt sich für die beiden Polynome u_1 und u_2:

$$\begin{aligned}
u_1(x) &= a_1 x^2 + b_1 x + c_1 = -x^2 + \frac{7}{8}x \\
u_2(x) &= a_2 x^2 + b_2 x + c_2 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

ii) Lösung:
Die gesuchte Lösung lautet also:

$$u(x) = \begin{cases} -x^2 + \frac{7}{8}x, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{1}{8}, & \frac{1}{2} < x \le 1. \end{cases}$$

Aufgabe 24 *(Programmieraufgabe, Finite Elemente Methode in 1D mit Hut-Funktionen)* (16 Punkte)

Programmieren Sie die Finite Elemente Methode für

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), \quad x \in \Omega = (0,1), \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned}$$

Als Basis für den diskreten Raum X_h sollen die Hut-Funktionen verwendet werden. Zu einem gegebenen Gitter $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = 1$ definieren wir die Hut-Funktion

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x \in (x_i, x_{i+1}], \\ 0, & \textit{sonst} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, N.$$

Das Gitter soll hier als äquidistant gewählt werden, d.h. $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, N+1$ mit $h = \frac{1}{N+1}$.

a) Berechnen Sie die Einträge der Steifigkeitsmatrix zunächst auf dem Papier.

b) Berechnen Sie dann ebenfalls zunächst auf dem Papier die Komponenten der rechten Seite (Lastvektor) b des linearen Gleichungssystems mittels Quadratur. Verwenden Sie hierzu

   i) die Mittelpunktsregel und
   ii) die Trapezregel.

   Hinweis:
   Wenden Sie bei der Berechnung der i-ten Komponente b_i die jeweilige Quadraturformel auf das Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ und das Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ getrennt an. Die Komponenten b_i hängen von f ab.

c) Berechnen Sie in Ihrem Matlab-Programm den Lastvektor b mit der Mittelpunktsregel aus Teil b), mit der Trapezregel aus Teil b) und mit der Matlab-Funktion `quad`.

d) Testen Sie Ihr Programm für die verschiedenen f aus Aufgabe 23 und zeichnen Sie die Lösung jeweils für verschiedene N.

e) Plotten Sie jeweils den Fehler.

Lösungsvorschlag:

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), \qquad x \in \Omega = (0,1) \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

Herleitung der schwachen Formulierung (Multiplikation mit Testfunktion v und Integration über Gebiet Ω):

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)v(x)\mathrm{d}x \qquad \forall\ v \in X$$

Partielle Integration der linken Seite (beachte: $v(0) = v(1) = 0$):

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)v(x)\mathrm{d}x \qquad \forall\ v \in X \tag{8}$$

Diskretes Problem:
Hutfunktionen als Basis:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}, & x \in (x_i, x_{i+1}] \\ 0, & sonst \end{cases}, \qquad i = 1, \ldots, N$$

wobei $x_i = i \cdot h,\ i = 0, \ldots, N, h = \frac{1}{N+1}$
Ansatz für die diskrete Näherungs-Lösung:

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{N} u_j \varphi_j(x)$$

Nach Übergang zum diskreten Teilraum $X_h \subset X$ lautet die Gleichung (9)

$$\int_0^1 u_h'(x)v_h'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)v_h(x)\mathrm{d}x \qquad \forall\ v_h \in X_h \tag{9}$$

Einsetzen von $u_h(x) = \sum_{j=1}^{N} u_j\varphi_j(x)$ liefert mit $u_h'(x) = \sum_{j=1}^{N} u_j\varphi_j'(x)$

$$\int_0^1 \sum_{j=1}^{N} u_j\varphi_j'(x)v_h'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)v_h(x)\mathrm{d}x \qquad \forall\ v_h \in X_h$$

und mit Vertauschung von Integration und Summation

$$\sum_{j=1}^{N} u_j \int_0^1 \varphi_j'(x)v_h'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)v_h(x)\mathrm{d}x \qquad \forall\ v_h \in X_h$$

Statt mit allen Funktionen $v_h \in X_h$ die Gleichung zu testen, genügt es, die Gleichung nur mit allen Basisfunktionen zu testen:

$$\sum_{j=1}^{N} u_j \int_0^1 \varphi_j'(x)\varphi_i'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)\mathrm{d}x \qquad i = 1, \ldots, N \tag{10}$$

Dies ergibt ein lineares Gleichungssystem $A \cdot u = b$:

$$\begin{aligned} A &= (a_{ij})_{1\le i,j\le N} \qquad \text{mit } a_{ij} = \int_0^1 \varphi_j'(x)\varphi_i'(x)\mathrm{d}x \\ u &= (u_1, \ldots, u_N)^T \\ b &= (b_1, \ldots, b_N)^T \qquad \text{mit } b_i = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx. \end{aligned}$$

a) Berechnung der Einträge von A:

$$\begin{aligned} \varphi_i'(x) &= \begin{cases} \frac{1}{x_i-x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{-1}{x_{i+1}-x_i}, & x \in (x_i, x_{i+1}] \\ 0, & sonst \end{cases}, \qquad i = 1, \ldots, N \\ &= \begin{cases} \frac{1}{h}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ -\frac{1}{h}, & x \in (x_i, x_{i+1}] \\ 0, & sonst \end{cases}, \qquad i = 1, \ldots, N \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_{i,i-1} &= \int_0^1 \underbrace{\varphi'_{i-1}(x)\varphi'_i(x)}_{\neq 0 \text{ nur in } [x_{i-1},x_i]} \,\mathrm{d}x \qquad\qquad i = 2, \ldots, N \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} -\frac{1}{h} \cdot \frac{1}{h} \mathrm{d}x = -\frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} 1 \mathrm{d}x = -\frac{1}{h^2} \cdot [x_i - x_{i-1}] = -\frac{1}{h^2} \cdot h \\
&= -\frac{1}{h} \\
a_{i,i+1} &= \int_0^1 \varphi'_{i+1}(x)\varphi'_i(x) \mathrm{d}x \qquad\qquad i = 1, \ldots, N-1 \\
&= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h} \cdot \frac{-1}{h} \mathrm{d}x = -\frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} 1 \mathrm{d}x = -\frac{1}{h^2} [x_{i+1} - x_i] = -\frac{1}{h^2} \cdot h \\
&= -\frac{1}{h} \\
a_{ii} &= \int_0^1 \varphi'_i(x)\varphi'_i(x) \mathrm{d}x \qquad\qquad i = 1, \ldots, N \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{h} \mathrm{d}x + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{-1}{h} \cdot \frac{-1}{h} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{h^2} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} 1 \mathrm{d}x + \int_{x_i}^{x_{i+1}} 1 \mathrm{d}x \right) = \frac{1}{h^2} \left([x_i - x_{i-1}] + [x_{i+1} - x_i] \right) = \frac{1}{h^2} \cdot 2h \\
&= \frac{2}{h} \\
a_{ij} &= 0 \qquad \text{sonst (da Träger von } \varphi_i \text{ und } \varphi_j \text{ disjunkt)}
\end{aligned}
$$

b) Berechnung der Rechten Seite:

$$
\begin{aligned}
b_i &= \int_0^1 f(x)\varphi_i(x) \mathrm{d}x \qquad\qquad i = 1, \ldots, N \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\varphi_i(x) \mathrm{d}x + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\varphi_i(x) \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

i) Mittelpunktsregel: $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \approx g\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (b-a)$
Anwendung auf jedes der beiden Integrale. Auswertepunkte:

$$
\begin{aligned}
x_l &= \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = x_{i-1} + \frac{h}{2} \quad \text{(linkes Integral)} \\
x_r &= \frac{x_i + x_{i+1}}{2} = x_i + \frac{h}{2} \quad \text{(rechtes Integral)} \\
&\Rightarrow \varphi_i(x_l) = \frac{1}{2}, \quad \varphi(x_r) = \frac{1}{2} \\
&\Rightarrow \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\varphi_i(x)\mathrm{d}x \approx f(x_l) \cdot \varphi_i(x_l) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \frac{h}{2} \cdot f(x_l) = \frac{h}{2} f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) \\
&\quad\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\varphi_i(x)\mathrm{d}x \approx f(x_r) \cdot \varphi_i(x_r) \cdot (x_{i+1} - x_i) = \frac{h}{2} \cdot f(x_r) = \frac{h}{2} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \\
&\Rightarrow b_i \approx \frac{h}{2} \left(f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) + f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \right)
\end{aligned}
$$

ii) Trapezregel: $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \approx \frac{g(a)+g(b)}{2}(b-a)$

Anwendung auf jedes der beiden Integrale.

$$
\begin{aligned}
b_i &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\varphi_i(x)\mathrm{d}x + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\varphi_i(x)\mathrm{d}x \\
&\approx \frac{f(x_{i-1})\overbrace{\varphi_i(x_{i-1})}^{=0}+f(x_i)\varphi_i(x_i)}{2}\overbrace{(x_i - x_{i-1})}^{=h} + \frac{f(x_i)\varphi_i(x_i) + f(x_{i+1})\overbrace{\varphi_i(x_{i+1})}^{=0}}{2}\overbrace{(x_{i+1} - x_i)}^{=h} \\
&= \frac{h}{2}\left(f(x_i)\underbrace{\varphi_i(x_i)}_{=1} + f(x_i)\underbrace{\varphi_i(x_i)}_{=1} \right) \\
&= h \cdot f(x_i)
\end{aligned}
$$

c) Matlab-Programm

```
% % Angewandte Numerik 2, WS 2013/2014
% Blatt 10, Aufgabe 24: FEM in 1D, Hutfunktionen
%
% Loesungsvorschlag
%
% Hauptprogramm: Finite-Elemente-Methode

clear all;
close all;

Ns = [10 50];                    % FEM fuer mehrere N testen

%% Schleife zum Testen fuer alle im Vektor Ns angegebenen N

for n = 1:length(Ns)
    N = Ns(n);
    h = 1 / (N+1);
    xi = linspace(0, 1, N+2);

%% Steifigkeitsmatrix A aufstellen

    e = ones(N,1);
    A = 1/h * spdiags([-e 2*e -e], -1:1, N, N);    % ohne x_0 und x_N+1

%% rechte Seite b berechnen

    biMpr = zeros(N,1);          % fuer Mittelpunktsregel
    biTr  = zeros(N,1);          % fuer Trapezregel
    biQuad = zeros(N,1);         % fuer Matlab-Funktion quad

    for func = 1:3               % FEM f¸r die 3 verschiedenen f testen
        u = zeros(N+2, 1);       % u ist die exakte Loesung
        if func == 1
            funcName = 'f(x)␣=␣1,␣Aufgabe␣23␣Teil␣a';
            f = @(x) 1;
            u = (-1/2 * xi .* (xi-1))';
        elseif func == 2
            funcName = 'f(x)␣=␣sin(pi*x),␣Aufgabe␣23␣Teil␣b';
            f = @(x) sin(pi*x);
            u = (1/(pi*pi) * sin(pi*xi))';
        elseif func == 3
```

```
            funcName = 'Sprungfunktion, Aufgabe 23 Teil c';
            f = @(x) f3(x);
            for i = 1:length(xi)
                x = xi(i);
                if (x<= 0.5)
                    u(i) = -x^2 + 7/8*x;
                else
                    u(i) = -0.5*x^2 + 3/8*x + 1/8;
                end
            end
        end                         % end Fallunterscheidung func

        % Quadratur fuer rechte Seite
        for i = 1:N
            x = xi(i+1);
            biMpr(i) = h/2 * (f(x-h/2) + f(x+h/2)); % Mittelpunktsregel
            biTr(i)  = h * f(x);                    % Trapezregel

            phiLinks  = @(x) (x- xi(i)) ./ (xi(i+1)-xi(i));
            phiRechts = @(x) (xi(i+2)-x) ./ (xi(i+2)-xi(i+1));
            biQuad(i) = quad(@(x) phiLinks(x).*f(x), xi(i), xi(i+1)) ...
                      + quad(@(x) phiRechts(x).*f(x), xi(i+1), xi(i+2));
        end

%% Loesen des FEM-Gleichungssystems und Fehler berechnen

        uhMpr  = zeros(N+2, 1);     % Naeherungsl. bei Mittelpunktsregel
        uhTr   = zeros(N+2, 1);     % Naeherungsl. bei Mittelpunktsregel
        uhQuad = zeros(N+2, 1);     % Naeherungsl. bei Matlab-Funktion quad

        uhMpr(2:N+1) = A\biMpr;
        uhTr(2:N+1)  = A\biTr;
        uhQuad(2:N+1)= A\biQuad;

        errMpr = abs(u - uhMpr);    % Fehler gegenueber der analytischen Loesung
        errTr  = abs(u - uhTr);
        errQuad = abs(u - uhQuad);

%% Loesung und Fehler in verschiedene Grafiken plotten:
%       fuer jedes N und fuer jede Funktion eine eigene Grafik
%       jeweils fuer die Loesung und den Fehler

        % Loesung plotten
        figure( (((n-1)*3)+(func-1))*2+1 );
        plot(xi, uhMpr, '+-', xi, uhTr, 'o-', xi, uhQuad, '*-', xi, u)
        legend('Mittelpunktsregel', 'Trapezregel', ...
                            'Matlab-Funktion quad', 'exakte L^sung')
        title(['L^sung f¸r ' funcName '; N = ' num2str(N)])
        xlabel('x')
        ylabel('u')

        % Fehler Plotten
        figure( (((n-1)*3)+(func-1))*2+2 );
        plot(xi, errMpr, '+-', xi, errTr, 'o-', xi, errQuad, '*-')
```

```
        legend('Mittelpunktsregel', 'Trapezregel', 'Matlab-Funktion quad')
        title(['Fehler f¸r ' funcName '; N = ' num2str(N)])
        xlabel('x')
        ylabel('err')

    end                         % 3 verschiedene f
end                             % Verschiedene N
```

```
%% Angewandte Numerik 2, WS 2013/2014
% Blatt 10, Aufgabe 24: FEM in 1D, Hutfunktionen
%
% Loesungsvorschlag
%
% Sprungfunktion f von Aufgabe 23 c)

function [ y ] = f3( x )

    if (x < 0.5)
        y = 2;
    elseif (x > 0.5)
        y = 1;
    else
        y = 1.5;

    end
end
```

d) Näherungslösungen

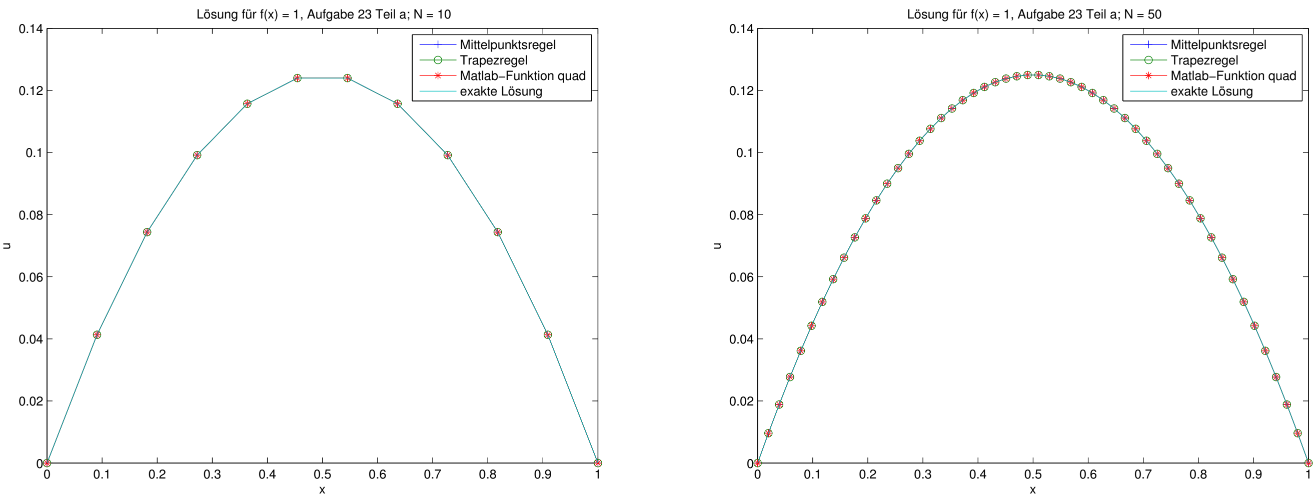

Abbildung 1: Lösungen zur konstanten Funktion aus Aufgabe 23 a für $N = 10$ und $N = 50$

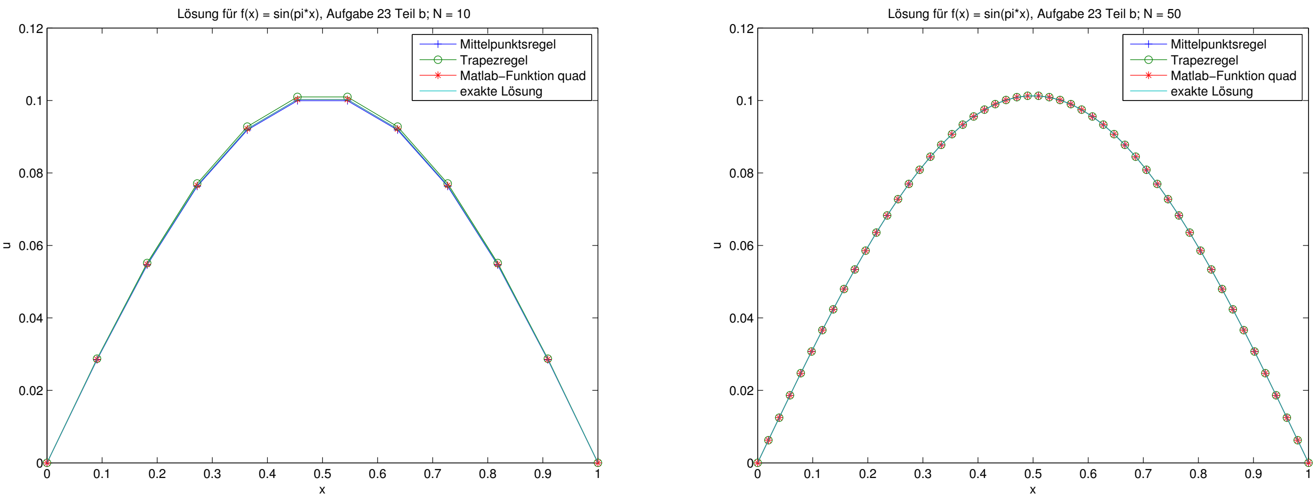

Abbildung 2: Lösungen zur Sinus-Funktion aus Aufgabe 23 b für $N = 10$ und $N = 50$

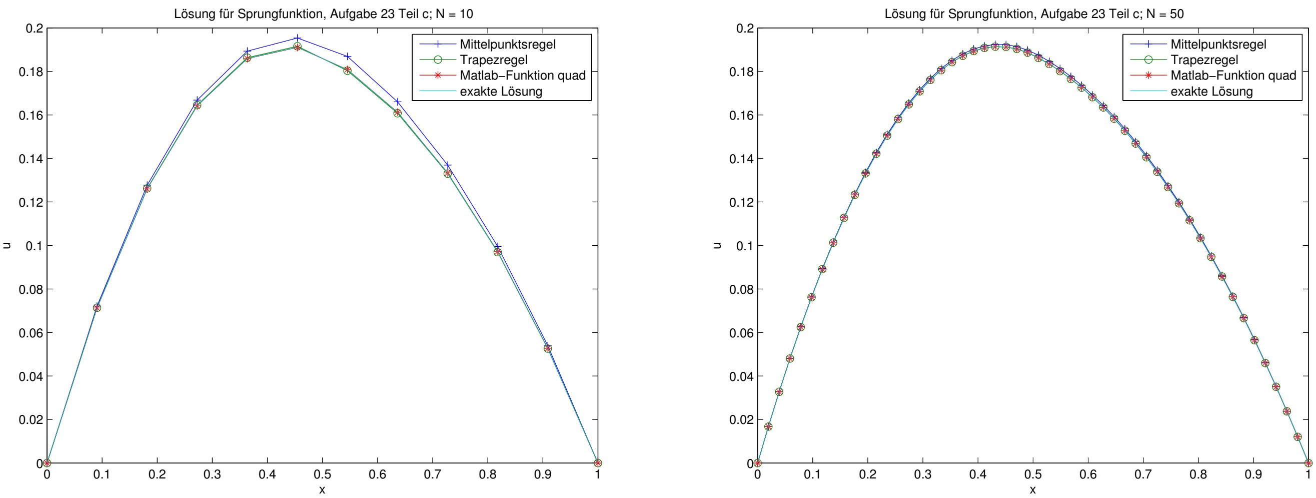

Abbildung 3: Lösungen zur Sprung-Funktion aus Aufgabe 23 c für $N = 10$ und $N = 50$

e) Fehler

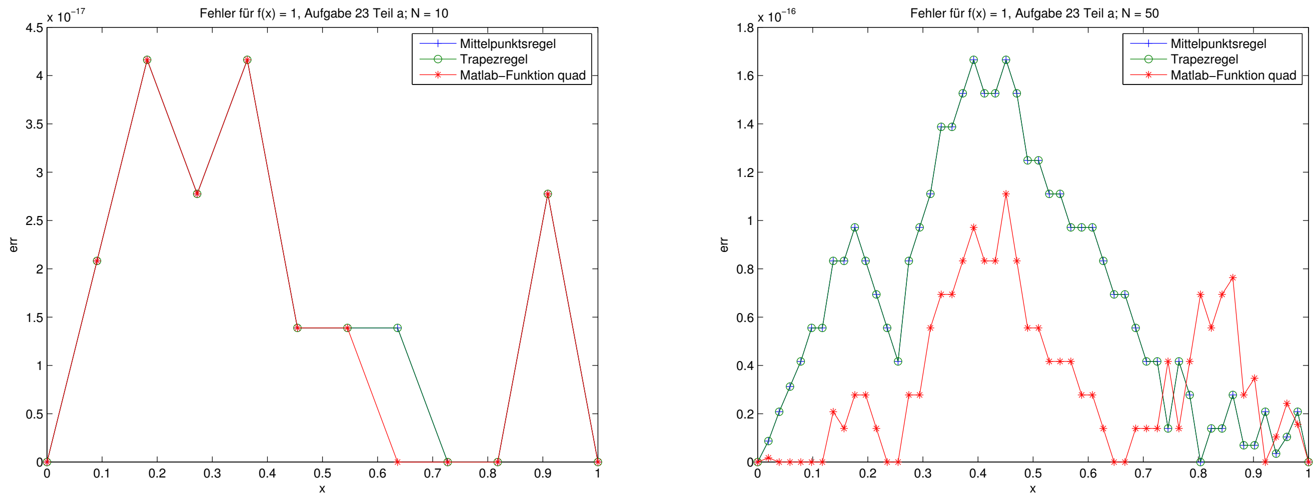

Abbildung 4: Fehler zur konstanten Funktion aus Aufgabe 23 a für $N = 10$ und $N = 50$

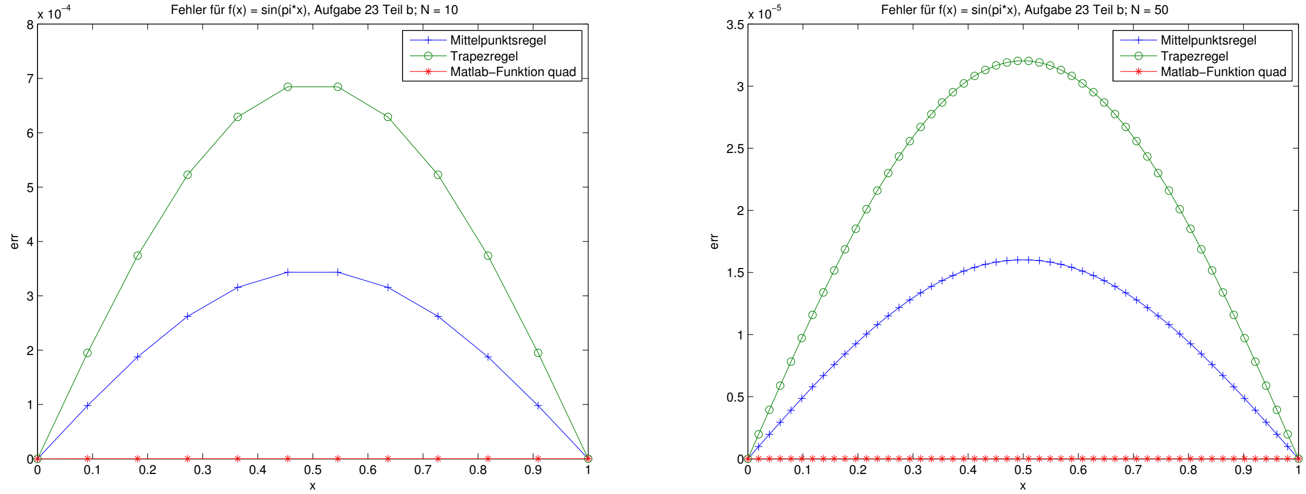

Abbildung 5: Fehler zur Sinus-Funktion aus Aufgabe 23 b für $N = 10$ und $N = 50$

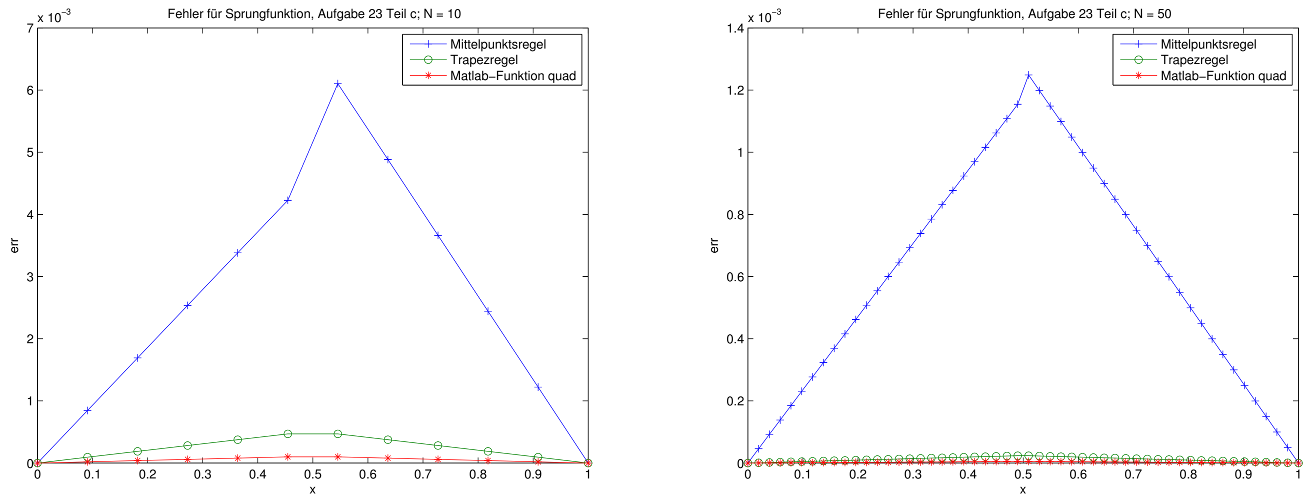

Abbildung 6: Fehler zur Sprung-Funktion aus Aufgabe 23 c für $N = 10$ und $N = 50$

Aufgabe 25 *(Zusatz-Programmieraufgabe, FEM in 1D mit Trigonometrischen Funktionen)* (8* Punkte)

Wir betrachten wieder das Problem

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), \quad x \in \Omega = (0,1), \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned}$$

Jetzt verwenden wir als Basis für den Raum X_h die Funktionen $\varphi_k(x) = \sin(k\pi x)$, $k = 1, \ldots, N$.

a) Berechnen Sie wie in Aufgabe 24 die Einträge der Steifigkeitsmatrix zunächst auf dem Papier.

b) Testen Sie Ihr Programm wieder für die verschiedenen f aus Aufgabe 23 und zeichnen Sie die Lösung jeweils für verschiedene N. Sie dürfen zur Berechnung des Lastvektors b die Matlab-Funktion `quad` verwenden.

c) Plotten Sie jeweils den Fehler.

Lösungsvorschlag:
Basisfunktionen

$$\begin{aligned} & \varphi_k(x) = \sin(k\pi x), \qquad k = 1, \ldots, N \\ \Rightarrow \quad & \varphi_k'(x) = k\pi\cos(k\pi x) \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \cos(x)\cdot\cos(y) &= \frac{1}{2}\left(\cos(x-y)+\cos(x+y)\right) \text{ und} \\ \cos^2(x) &= \frac{1}{2}(1+\cos(2x)) \end{aligned}$$

a) Berechnung der Einträge der Steifigkeitsmatrix:

$$\begin{aligned} a_{kk} &= \int_0^1 \varphi_k'(x)\cdot\varphi_k'(x)\mathrm{d}x \qquad k = 1, \ldots, N \\ &= \int_0^1 k\pi\cos(k\pi x)\cdot k\pi\cos(k\pi x)\mathrm{d}x \\ &= k^2\pi^2\int_0^1 \cos^2(k\pi x)\mathrm{d}x \\ &= k^2\pi^2\int_0^1 \frac{1}{2}(1+\cos(2k\pi x))\mathrm{d}x \\ &= \frac{k^2\pi^2}{2}\left[x+\frac{1}{2k\pi}\sin(2k\pi x)\right]_0^1 \\ &= \frac{k^2\pi^2}{2}\left(1+\frac{1}{2k\pi}\underbrace{\sin(2k\pi)}_{=0}-0-\frac{1}{2k\pi}\underbrace{\sin(2k\pi 0)}_{=0}\right) \\ &= \frac{k^2\pi^2}{2} \\ a_{kj} &= \int_0^1 \varphi_k'(x)\varphi_j'(x)\mathrm{d}x \qquad k,j = 1, \ldots, N,\ k \neq j \\ &= \int_0^1 k\pi\cos(k\pi x)\cdot j\pi\cos(j\pi x)\mathrm{d}x \\ &= kj\pi^2\int_0^1 \cos(k\pi x)\cdot\cos(j\pi x)\mathrm{d}x \\ &= kj\pi^2\int_0^1 \frac{1}{2}\left(\cos((k-j)\pi x)+\cos((k+j)\pi x)\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{kj\pi^2}{2}\left[\frac{1}{(k-j)\pi}\sin((k-j)\pi x)+\frac{1}{(k+j)\pi}\sin((k+j)\pi x)\right]_0^1 \\ &= \frac{kj\pi^2}{2\pi}\left(\frac{1}{k-j}\underbrace{\sin((k-j)\pi)}_{=0}+\frac{1}{k+j}\underbrace{\sin((k+j)\pi)}_{=0}-\frac{1}{k-j}\underbrace{\sin(0)}_{=0}-\frac{1}{k+j}\underbrace{\sin(0)}_{=0}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also hat die Steifigkeitsmatrix die Form:

$$A = \frac{\pi^2}{2}\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 4 & & & \\ & & 9 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & N^2 \end{pmatrix}$$

b) Matlab-Programm

```
% % Angewandte Numerik 2, WS 2013/2014
% Blatt 10, Aufgabe 25: FEM in 1D, Fourier-Basis-Funktionen
%
% Loesungsvorschlag
%
% Hauptprogramm: Finite-Elemente-Methode

clear all;
close all;

Ns = [10 100];                   % FEM fuer mehrere N testen
xi = linspace(0, 1, 1000);       % Aufloesung zur Berechnung der Naeherung

%% Schleife zum Testen fuer alle im Vektor Ns angegebenen N

for n = 1:length(Ns)
    N = Ns(n);
    indBasisFunc = (1:N)';       % Indizes der Basisfunktionen

%% Steifigkeitsmatrix A aufstellen

    A = (pi*pi/2) * spdiags(indBasisFunc.^2, 0, N, N);

%% rechte Seite b berechnen

    for func = 1:3               % FEM f¸r die 3 verschiedenen f testen
        u = zeros(length(xi),1);     % u ist die exakte Loesung
        if func == 1
            funcName = 'f(x) = 1, Aufgabe 23 Teil a';
            f = @(x) 1;
            u = (-1/2 * xi .* (xi-1))';
        elseif func == 2
            funcName = 'f(x) = sin(pi*x), Aufgabe 23 Teil b';
            f = @(x) sin(pi*x);
            u = (1/(pi*pi) * sin(pi*xi))';
        elseif func == 3
            funcName = 'Sprungfunktion, Aufgabe 23 Teil c';
            f = @(x) f3(x);
            for i = 1:length(xi)
                x = xi(i);
                if (x<= 0.5)
                    u(i) = -x^2 + 7/8*x;
                else
                    u(i) = -0.5*x^2 + 3/8*x + 1/8;
                end
            end
        end                          % end Fallunterscheidung func

        % Quadratur fuer rechte Seite
        bi = zeros(N,1);
        for i = 1:N
            bi(i) = quad(@(x) (f(x).*sin(i*pi*x)), 0, 1);
        end
```

```
%% Loesen des FEM-Gleichungssystems und Fehler berechnen

        % Koeffizienten der Linearkombination der Basisfunktionen berechnen
        ui = A\bi;

        uh = zeros(length(xi),1);
        for i=1:N
            uh = uh + ui(i).*sin(i.*pi.*xi)';
        end

        err = abs(u - uh);  % Fehler gegenueber der analytischen Loesung

%% Loesung und Fehler in verschiedene Grafiken plotten:
%       fuer jedes N und fuer jede Funktion eine eigene Grafik
%       jeweils fuer die Loesung und den Fehler

        % Loesung plotten
        figure( (((n-1)*3)+(func-1))*2+1 );
        plot(xi, uh, '-', xi, u, '-')
        legend('N‰herungslˆsung', 'exakte␣Lˆsung')
        title(['Lˆsung␣f¸r␣' funcName ';␣N␣=␣' num2str(N)])
        xlabel('x')
        ylabel('u')

        % Fehler plotten
        figure( (((n-1)*3)+(func-1))*2+2 );
        plot(xi, err)
        legend('Fehler')
        title(['Fehler␣f¸r␣' funcName ';␣N␣=␣' num2str(N)])
        xlabel('x')
        ylabel('err')
%
    end                         % 3 verschiedene f
end                             % Verschiedene N
```

```
% % Angewandte Numerik 2, WS 2013/2014
% Blatt 10, Aufgabe 24: FEM in 1D, Hutfunktionen
%
% Loesungsvorschlag
%
% Sprungfunktion f von Aufgabe 23 c)

function [ y ] = f3( x )

    if (x < 0.5)
        y = 2;
    elseif (x > 0.5)
        y = 1;
    else
        y = 1.5;

    end
end
```

c) Näherungslösungen

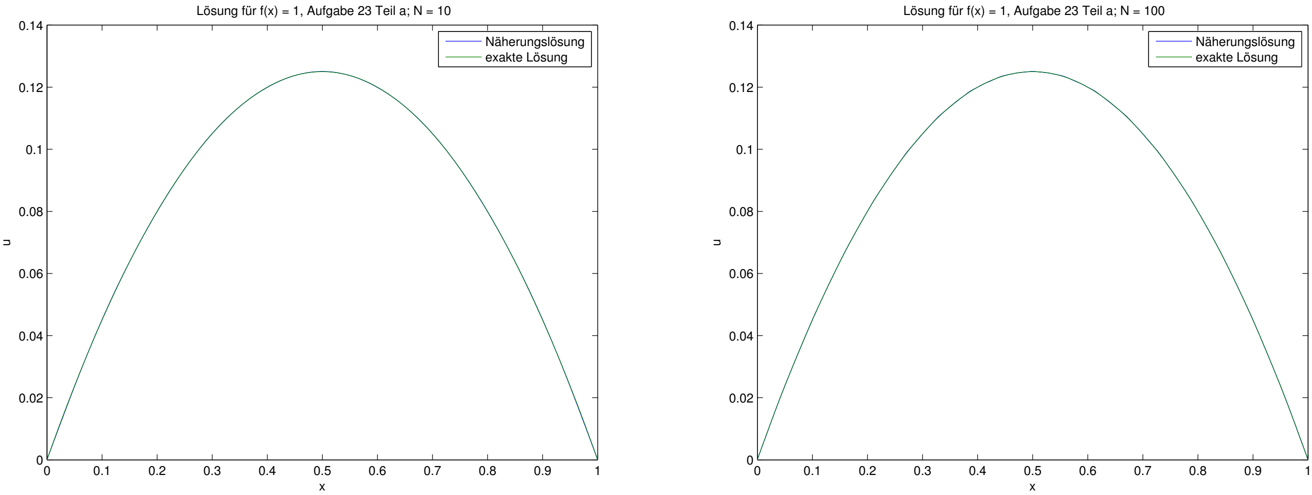

Abbildung 7: Lösungen zur konstanten Funktion aus Aufgabe 23 a für $N = 10$ und $N = 100$

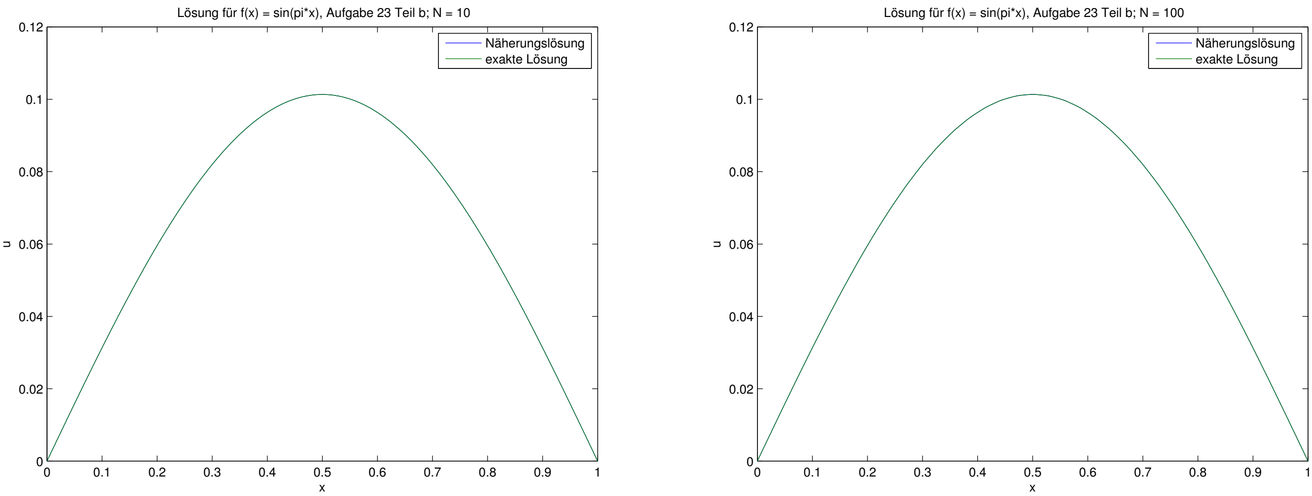

Abbildung 8: Lösungen zur Sinus-Funktion aus Aufgabe 23 b für $N = 10$ und $N = 100$

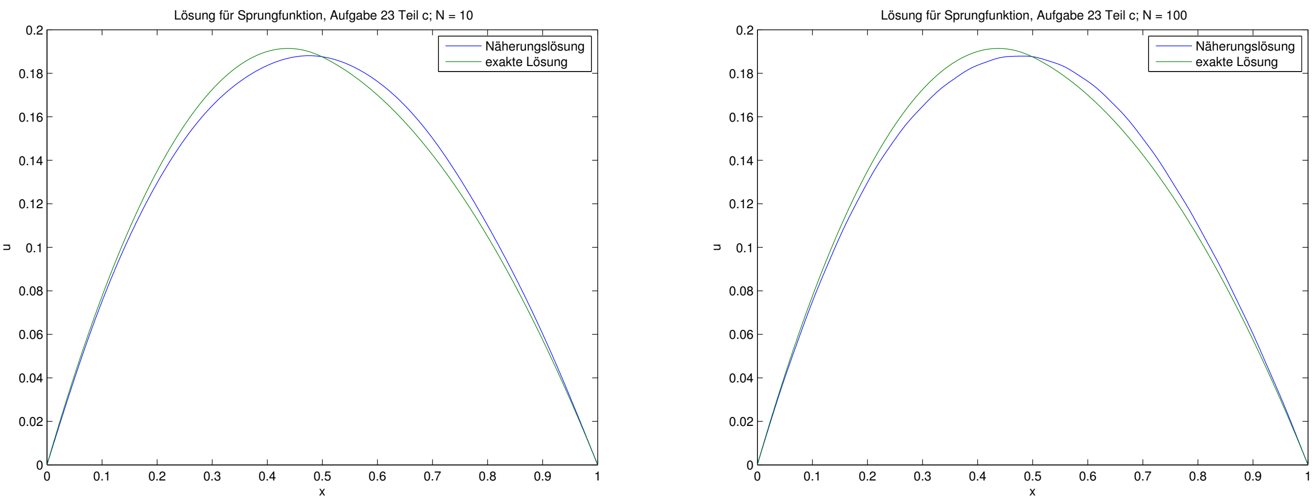

Abbildung 9: Lösungen zur Sprung-Funktion aus Aufgabe 23 c für $N = 10$ und $N = 100$

d) Fehler

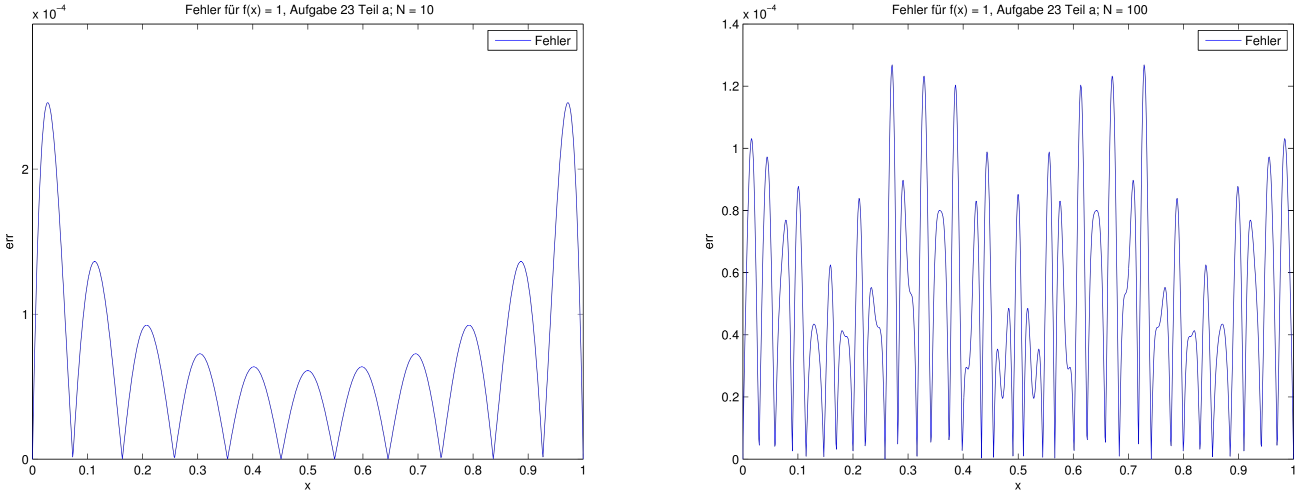

Abbildung 10: Fehler zur konstanten Funktion aus Aufgabe 23 a für $N = 10$ und $N = 100$

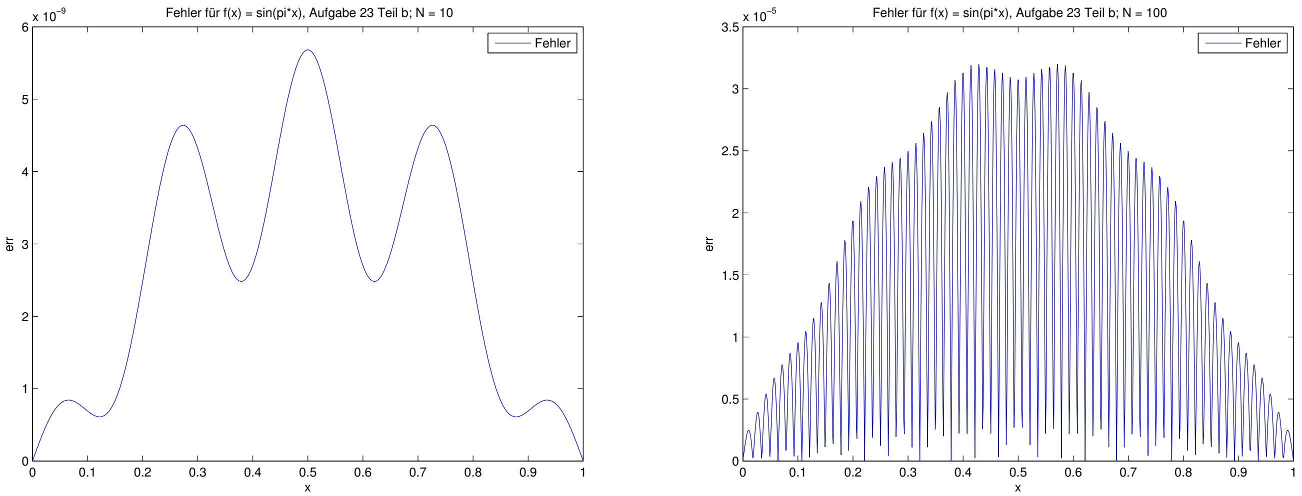

Abbildung 11: Fehler zur Sinus-Funktion aus Aufgabe 23 b für $N = 10$ und $N = 100$

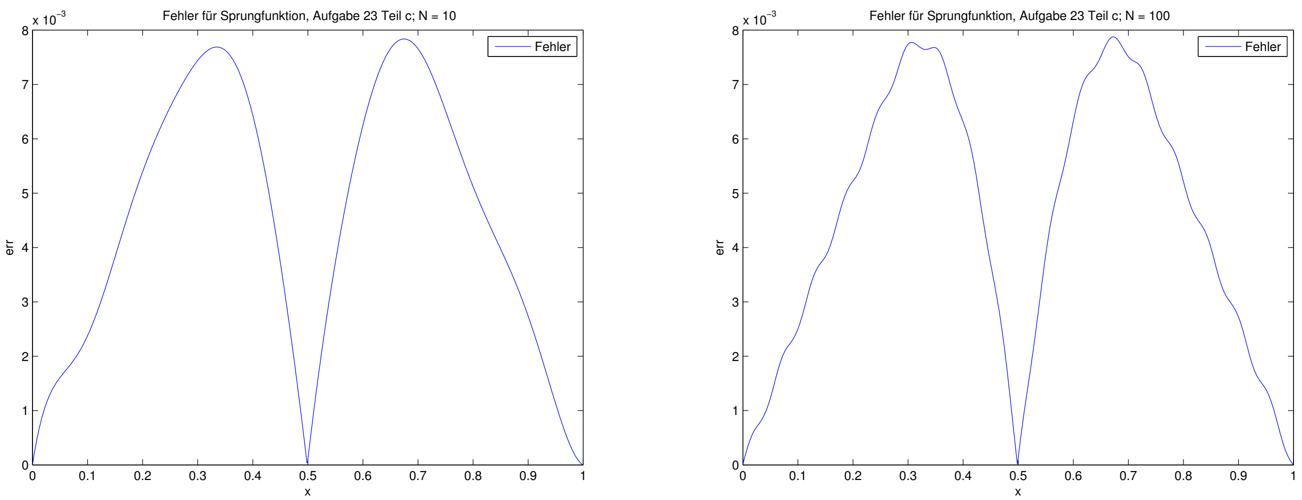

Abbildung 12: Fehler zur Sprung-Funktion aus Aufgabe 23 c für $N = 10$ und $N = 100$