

Angewandte Numerik 2

Raumänderung (Vorankündigung):

Am **07. Februar 2014** finden wegen der Promotionsfeier der Fakultät für Ingenieurwissenschaften und Informatik die Übungen zu Angewandte Numerik 2 im Raum 43.2.103 statt.

Aufgabe 26 (Programmieraufgabe, Finite-Elemente-Methode in 1D mit Hut-Funktionen) (16 Punkte)

Programmieren Sie die Finite Elemente Methode für

$$-(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f \quad x \in \Omega = (0, 1). \quad (1)$$

- Leiten Sie die schwache Formulierung der Differentialgleichung her.
- Stellen Sie für die Hut-Basis ein Gleichungssystem der Form $(A + B + C)u = f$ auf.
- Berechnen Sie die Einträge der drei Matrizen A, B und C auf dem Papier. Auf einem Element sollen die Koeffizienten $a(x), b(x)$ und $c(x)$ als konstant (angenähert durch den Wert des Mittelpunkts des jeweiligen Elements) angenommen werden.
- Betrachten Sie nun die gegebene Funktion `solve_1dfem.m` und die vorhandenen Gitterdaten `coordinates.dat`, `elements.dat` und `dirichlet.dat`. Sie finden die entsprechenden Dateien im zip-Archiv `fem1d.zip` auf der Homepage. Versuchen Sie zu verstehen, was im Code gemacht wird!
- Vervollständigen Sie die Routine `fem1d.m`, welche die Finite-Elemente-Lösung von (1) berechnet. Sie dürfen dabei annehmen, dass die Koeffizienten $a(x), b(x)$ und $c(x)$ in $\Omega = (0, 1)$ konstant sind. Achten Sie darauf, dass das Gitter nicht notwendigerweise äquidistante Gitterabstände haben muss.
- Testen Sie das Programm mit folgenden Daten:
 - $a = 1, b = 0, c = 0, f = 1$ und $u(0) = u(1) = 0$,
 - $a = 1, b = 0, c = 0, f = 1$ und $u(0) = 0, u(1) = 1$,
 - $a = 1, b = 0, c = 0, f = x$ und $u(0) = u(1) = 0$,
 - $a = 1, b = 0, c = 1/100, f = 1$ und $u(0) = u(1) = 0$,
 - $a = 1, b = 1/10, c = 0, f = 1$ und $u(0) = u(1) = 0$.

Lösung:

- Wir betrachten die Diffusions-Konvektions-Reaktions-Gleichung mit Dirichlet-Rand, wobei die Dirichlet-Daten im Hinblick auf Aufgabenteil f) allgemein gehalten sind und sowohl homogen als auch inhomogen sein können:

$$\begin{aligned} -(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) &= f(x), \quad x \in \Omega = (0, 1) \\ u(0) &= u_D(0) \\ u(1) &= u_D(1) \end{aligned}$$

Die Idee ist es, ein Problem mit inhomogenen Dirichlet-Daten in ein solches mit homogenen Randbedingungen zu überführen.

Ergänzung: Etwas allgemeiner formuliert kann man die vorstehende Diffusions-Konvektions-Reaktions-Gleichung mit einem Differentialoperator L formulieren. Wir setzen hierzu:

$$Lu := -(au')' + bu' + cu.$$

Das Diffusions-Konvektions-Reaktions-Problem mit inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen lautet dann, gesucht ist $u \in H^1(\Omega)$ mit

$$\begin{aligned} Lu &= f, & \text{in } \Omega = (0, 1), \\ u &= u_D, & \text{auf } \partial\Omega = \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Nehmen wir an, dass eine zulässige Funktion \tilde{u}_D bekannt ist, die die Dirichlet-Daten u_D erfüllt, dann kann man eine Funktion $u_0 = u - \tilde{u}_D$ einführen und erhält das homogene Randwertproblem in u_0

$$\begin{aligned} Lu_0 &= f - L\tilde{u}_D, & \text{in } \Omega = (0, 1), \\ u_0 &= 0, & \text{auf } \partial\Omega = \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Homogenisierung: Definiere hierzu zunächst $u := u_0 + \tilde{u}_D$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\tilde{u}_D \in H^1(\Omega)$. D.h. als Summe einer Lösungsfunktion u_0 , die auf dem Rand verschwindet (homogene Dirichlet-Daten) und einer Funktion \tilde{u}_D , die nicht auf dem Rand verschwindet und gegebenen Falls inhomogene Dirichlet-Bedingungen berücksichtigt.

Wie üblich testen wir mit einer geeigneten Testfunktion $v \in H_0^1(\Omega)$ und integrieren die Gleichung. Partielle Integration (P.I.) liefert dann

$$\begin{aligned} - \int_0^1 auv'' dx + \int_0^1 bu'v dx + \int_0^1 cuv dx &= \int_0^1 au'v' dx - [u'v]_0^1 + \int_0^1 bu'v dx + \int_0^1 cuv dx \\ &= \int_0^1 au'v' dx - \underbrace{u'(1)v(1)}_{=0, \text{ da } v \in H_0^1(\Omega)} + \underbrace{u'(0)v(0)}_{=0, \text{ da } v \in H_0^1(\Omega)} + \int_0^1 bu'v dx + \int_0^1 cuv dx \\ &= \int_0^1 fv dx. \end{aligned}$$

Die *Schwache Formulierung* lautet dann: Finde $u \in H^1(\Omega)$ mit

$$- \int_0^1 au'v' dx + \int_0^1 bu'v dx + \int_0^1 cuv dx = \int_0^1 fv dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Mit $u = u_0 + \tilde{u}_D$ ist dies äquivalent zu: Finde $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$\underbrace{\int_0^1 au_0'v' dx + \int_0^1 bu_0'v dx + \int_0^1 cu_0v dx}_{=:a(u_0,v)} = \underbrace{\int_0^1 fv dx}_{=: (f,v)} - \underbrace{\left[\int_0^1 a\tilde{u}_D'v' dx + \int_0^1 b\tilde{u}_D'v dx + \int_0^1 c\tilde{u}_Dv dx \right]}_{=:a(\tilde{u}_D,v)}. \quad (2)$$

b) *Diskretes Problem in Matrix-Vektor Form*

Wir betrachten eine Diskretisierung des abgeschlossenen Intervalls $\bar{\Omega} = [0, 1]$ in $N + 1$ nicht notwendigerweise äquidistante Teilintervalle $T_i = [x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, N + 1$ der Länge $h_i := x_i - x_{i-1}$. Es seien $\varphi_0, \dots, \varphi_{N+1}$ die Hutfunktionen zu den $N + 2$ Knoten x_0, \dots, x_{N+1} .

Weiter sei X_h der von allen Hutfunktionen aufgespannte Vektorraum, d.h.

$$X_h = \text{span}\{\varphi_0, \dots, \varphi_{N+1}\} \subset H^1(\Omega)$$

und $X_{h,0}$ der von den Hutfunktionen zu den inneren Knoten aufgespannte Raum:

$$X_{h,0} = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\} \subset H_0^1(\Omega)$$

Wenn wir $u_{0,h} \in X_{h,0} \subset H_0^1(\Omega)$ und $u_{g,h} \in X_h \subset H^1(\Omega)$ wie zuvor wählen, dann lautet die diskretisierte schwache Formulierung zu (2):

Finde $u_{0,h} \in X_{h,0}$ mit

$$a(u_{0,h}, v_h) = (f, v_h) - a(u_{D,h}, v_h), \quad \forall v_h \in X_{h,0}.$$

Jede Approximation $u_{0,h} \in X_{h,0}$ von u_0 und $u_{D,h} \in X_h$ von \tilde{u}_D lässt sich als Linearkombination der Basisfunktionen des entsprechenden Raumes darstellen, d.h.

$$u_{0,h}(x) = \sum_{j=1}^N u_{0,j} \varphi_j(x) \quad \text{und} \quad u_{D,h} = \sum_{j=0}^{N+1} u_{D,j} \varphi_j(x).$$

Hierbei entsprechen die Koeffizienten $u_{0,j}, j = 1, \dots, N$ und $u_{D,j}, j = 0, \dots, N + 1$ den Werten von u_0 und \tilde{u}_D an den Knoten. Einsetzen der Darstellung bzgl. der Basisvektoren ergibt.

$$a\left(\sum_{j=1}^N u_{0,j} \varphi_j, v_h\right) = (f, v_h) - a\left(\sum_{j=0}^{N+1} u_{D,j} \varphi_j, v_h\right), \quad \forall v_h \in X_{h,0}$$

Da $a(\cdot, \cdot)$ eine Bilinearform ist, d.h. linear in jedem Argument, und die Koeffizienten Konstanten bzgl. der Integration sind, kann man diese herausziehen und es ergibt sich.

$$\sum_{j=1}^N u_{0,j} a(\varphi_j, v_h) = (f, v_h) - \sum_{j=0}^{N+1} u_{D,j} a(\varphi_j, v_h), \quad \forall v_h \in X_{h,0} \quad (3)$$

Gleichung (3) soll für alle diskreten Testfunktionen $v_h \in X_{h,0}$ gelten, welche sich wiederum als Linearkombination der Basisvektoren darstellen lassen. Wählen wir nun speziell $v_h = \varphi_i$ für ein beliebig festes $i \in \{1, \dots, N\}$, so muss die Gleichung natürlich auch gelten. Damit ist (3) gleichbedeutend damit, dass die Gleichung für jede Basisfunktion $v_h = \varphi_i, i = 1, \dots, N$ gilt. Wir erhalten die folgenden N Gleichungen

$$\sum_{j=1}^N u_{0,j} a(\varphi_j, \varphi_i) = (f, \varphi_i) - \sum_{j=0}^{N+1} u_{D,j} a(\varphi_j, \varphi_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (4)$$

Mit anderen Worten, wir erhalten ein System von N Gleichungen. Bekanntermaßen lässt sich ein solches in Matrix-Vektor-Form darstellen. Betrachten wir hierzu noch mal die Bilinearform und setzen

$$a(\varphi_j, \varphi_i) = \underbrace{\int_0^1 a \varphi_j' \varphi_i' dx}_{=: a_{i,j}} + \underbrace{\int_0^1 b \varphi_j' \varphi_i dx}_{=: b_{i,j}} + \underbrace{\int_0^1 c \varphi_j \varphi_i dx}_{=: c_{i,j}}$$

als Einträge der folgenden Matrizen:

$$\begin{aligned} A &= (a_{i,j}), & B &= (b_{i,j}), & C &= (c_{i,j}), & i, j &= 1, \dots, N, \\ \tilde{A} &= (a_{i,j}), & \tilde{B} &= (b_{i,j}), & \tilde{C} &= (c_{i,j}), & i &= 1, \dots, N, & j &= 0, \dots, N + 1. \end{aligned}$$

Definieren wir weiter $\vec{u}_{0,h} := (u_{0,1}, \dots, u_{0,N})^T \in \mathbb{R}^N$ den Vektor der inneren Knotenwerte, $\vec{u}_{D,h} := (u_{D,0}, \dots, u_{D,N+1})^T \in \mathbb{R}^{N+2}$ als den Vektor der Knotenwerte der Funktion \tilde{u}_D und setzen $\vec{f} := (f_1, \dots, f_N)^T$ mit $f_i := (f, \varphi_i)$, so ist (4) äquivalent zu dem folgenden Gleichungssystem

$$(A + B + C)\vec{u}_{0,h} = \vec{f} - (\tilde{A} + \tilde{B} + \tilde{C})\vec{u}_{D,h}$$

c) Zur konkreten Berechnung der Einträge der drei Matrizen A, B und C betrachten wir zunächst die Hut-Funktionen zu den inneren Knoten und ihre Ableitungen

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i) \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, N$$

$$\varphi'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_i-x_{i-1}} = \frac{1}{h_i}, & x \in [x_{i-1}, x_i) \\ \frac{-1}{x_{i+1}-x_i} = \frac{-1}{h_{i+1}}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, N$$

Die Einträge der Matrizen \tilde{A}, \tilde{B} und \tilde{C} ergeben sich bis auf $a_{1,0}$ und $a_{N,N+1}$ analog. Zur Berechnung dieser Einträge betrachten wir die folgenden Ansatzfunktionen auf dem Randintervall

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1-x}{x_1-x_0}, & x \in [x_0, x_1] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad \varphi_{N+1}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_N}{x_{N+1}-x_N}, & x \in [x_N, x_{N+1}] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und ihre Ableitungen

$$\varphi'_0(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x_1-x_0}, & x \in [x_0, x_1] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad \varphi'_{N+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_{N+1}-x_N}, & x \in [x_N, x_{N+1}] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Hutfunktionen wollen wir nun die in b) definierten Matrixeinträge gerechnen. Da der Träger der Hutfunktionen jeweils lokal ist, erhalten wir nur Nichtnulleinträge für gleich bzw. benachbarte Indizes.

Nach Annahme sind die Koeffizienten als stückweise konstant und entsprechen auf jedem Element dem Koeffizienten ausgewertet an dem jeweiligen Mittelpunkt. Es sei m_i der Mittelpunkt des i -ten Elementes $T_i = [x_{i-1}, x_i]$.

Berechnung der Einträge der Matrix A bzw. \tilde{A} :

$$a_{i,i-1} = \int_0^1 a(x)\varphi'_i(x)\varphi'_{i-1}(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} a(m_i) \frac{1}{h_i} \frac{-1}{h_i} dx = a(m_i) \frac{-1}{h_i^2} (x_i - x_{i-1}) = \frac{-a(m_i)}{h_i}$$

$$a_{i,i+1} = \int_0^1 a(x)\varphi'_i(x)\varphi'_{i+1}(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} a(m_{i+1}) \frac{-1}{h_{i+1}} \frac{1}{h_{i+1}} dx = \frac{-a(m_{i+1})}{h_{i+1}}$$

$$a_{i,i} = \int_0^1 a(x)\varphi'_i(x)\varphi'_i(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} a(m_i) \frac{1}{h_i} \frac{1}{h_i} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} a(m_{i+1}) \frac{-1}{h_{i+1}} \frac{-1}{h_{i+1}} dx$$

$$= \frac{a(m_i)}{h_i} + \frac{a(m_{i+1})}{h_{i+1}}$$

$$a_{i,j} = 0, \quad \text{sonst}$$

Berechnung der Einträge der Matrix B bzw. \tilde{B} :

$$\begin{aligned}
b_{i,i-1} &= \int_0^1 b(x) \varphi'_i(x) \varphi'_{i-1}(x) dx = b(m_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \frac{-1}{h_i} dx \\
&= -\frac{b(m_i)}{h_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1}) dx = -\frac{b(m_i)}{h_i^2} \left[\frac{x^2}{2} - x x_{i-1} \right]_{x_{i-1}}^{x_i} \\
&= -\frac{b(m_i)}{h_i^2} \left(\left(\frac{x_i}{2} - x_{i-1} \right) x_i + \frac{x_{i-1}}{2} x_{i-1} \right) = -\frac{b(m_i)}{h_i^2} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2} = -\frac{b(m_i)}{2} \\
b_{i,i+1} &= \int_0^1 b(x) \varphi_i(x) \varphi'_{i+1}(x) dx = b(m_{i+1}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}} \frac{1}{h_{i+1}} dx \\
&= \frac{b(m_{i+1})}{h_{i+1}^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} x_{i+1} - x dx = \frac{b(m_{i+1})}{h_{i+1}^2} \frac{h_{i+1}^2}{2} = \frac{b(m_{i+1})}{2} \\
b_{i,i} &= \int_0^1 b(x) \varphi_i(x) \varphi'_i(x) dx = b(m_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \frac{1}{h_i} dx + b(m_{i+1}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}} \frac{-1}{h_{i+1}} dx \\
&= \frac{b(m_i)}{h_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1}) dx + \frac{b(m_{i+1})}{h_{i+1}^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} x_{i+1} - x dx \\
&= \frac{b(m_{i+1})}{2} - \frac{b(m_i)}{2} \\
b_{i,j} &= 0, \quad \text{sonst}
\end{aligned}$$

Berechnung der Einträge der Matrix C bzw. \tilde{C} : Das jeweilige Element wird zur Berechnung des Integrals auf das Referenzelement $\hat{T} = [0, 1]$ transformiert.

$$\begin{aligned}
c_{i,i-1} &= \int_0^1 c(x) \varphi_i(x) \varphi_{i-1}(x) dx = c(m_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \frac{x_i - x}{h_i} dx \\
&= c(m_i) h_i \int_0^1 \zeta(1 - \zeta) d\zeta = \frac{c(m_i) h_i}{6} \\
c_{i,i+1} &= \int_0^1 c(x) \varphi_i(x) \varphi_{i+1}(x) dx = c(m_{i+1}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}} \frac{x - x_i}{h_{i+1}} dx \\
&= c(m_{i+1}) h_{i+1} \int_0^1 \zeta(1 - \zeta) d\zeta = \frac{c(m_{i+1}) h_{i+1}}{6} \\
c_{i,i} &= \int_0^1 c(x) \varphi_i(x) \varphi_i(x) dx \\
&= c(m_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x - x_i}{h_i} \frac{x - x_i}{h_i} dx + c(m_{i+1}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}} \frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}} dx \\
&= c(m_i) h_i \int_0^1 \zeta^2 d\zeta + c(m_{i+1}) h_{i+1} \int_0^1 (1 - \zeta)^2 d\zeta = \frac{c(m_i) h_i}{3} + \frac{c(m_{i+1})}{3} \\
c_{i,j} &= 0, \quad \text{sonst}
\end{aligned}$$

e)

```
1 function u=fem1dkomplett(coordinates , elements , dirichlet , a , b , c , f , u_d)
2
3 N=size ( elements , 1 );
4 A=sparse ( N+1 , N+1 );
5 B=sparse ( N+1 , N+1 );
6 C=sparse ( N+1 , N+1 );
7 rhs=zeros ( N+1 , 1 );
8 u=zeros ( N+1 , 1 );
9
10 % Aufstellen der Steifigkeitsmatrix
11 for j=1:N
12     x=coordinates ( elements ( j , : ) );
13     A( elements ( j , : ) , elements ( j , : ) )=A( elements ( j , : ) , elements ( j , : ) )+...
14         a / ( x( 2 ) - x( 1 ) ) * [ 1  -1 ; -1  1 ];
15     B( elements ( j , : ) , elements ( j , : ) )=B( elements ( j , : ) , elements ( j , : ) )+...
16         b / 2 * [ -1  1 ; -1  1 ];
17     C( elements ( j , : ) , elements ( j , : ) )=C( elements ( j , : ) , elements ( j , : ) )+...
18         c * ( x( 2 ) - x( 1 ) ) / 6 * [ 2  1 ; 1  2 ];
19 end
20 % Rechte Seite
21 for j=1:N
22     x=coordinates ( elements ( j , : ) );
23     rhs ( [ elements ( j , 1 ) ; elements ( j , 2 ) ] )=rhs ( [ elements ( j , 1 ) ; elements ( j , 2 ) ] )+...
24         ( x( 2 ) - x( 1 ) ) / 2 * f ( ( x( 1 ) + x( 2 ) ) / 2 );
25 end
26
27 % Dirichlet Bedingungen
28 u( dirichlet )=u_d;
29
30 % Berechnung der Loesung
31 %C=diag ( sum ( C' ) );
32 M=A+B+C;
33 freenodes=setdiff ( 1 : size ( elements , 1 ) + 1 , dirichlet );
34
35 rhs=rhs-M*u;
36
37 u( freenodes )=M( freenodes , freenodes ) \ rhs ( freenodes );
```

f)

```
1 function solve_1dfem_komplett
2 % Matlab Programm fuer 1D- Problem
3 %  $-au'' + bu' + cu = f$  in  $(0,1)$ 
4 %  $a, b, c$  konstant
5
6 clear all;
7 close all;
8
9 % Netz laden
10 load coordinates.dat
11 load elements.dat
12 load dirichlet.dat
13
14 teil = 'f';
15
16 switch teil
17     case 'a'
18         a=1;b=0;c=0;    u_d=[0;0]; f = @(x) 1; ...
19         u_exact = @(x) 1/2*(-x^2+x);
20     case 'b'
21         a=1;b=0;c=0;    u_d=[0;1]; f = @(x) 1; ...
22         u_exact = @(x) -1/2*x^2+3/2*x;
23     case 'c'
24         a=1;b=0;c=0;    u_d=[0;0]; f = @(x) x; ...
25         u_exact = @(x) 1/6*x*(-x^2+1);
26     case 'd'
27         a=1;b=0;c=1/100; u_d=[0;0]; f = @(x) 1; ...
28         u_exact = @(x) -100*(exp(-x/10+1/10)-exp(1/10) ...
29         +exp(x/10)-1)/(1+exp(1/10));
30     case 'e'
31         a=1;b=1/10;c=0; u_d=[0;0]; f = @(x) 1; ...
32         u_exact = @(x) 10*(-exp(x/10)+x*exp(1/10)-x+1)/(exp(1/10)-1);
33     case 'f'
34         a=1;b=0;c=100; u_d=[0;0]; f = @(x) 1; ...
35         u_exact = @(x) -0.01*(exp(-10*x+10)-exp(10))...
36         +exp(10*x)-1)/(1+exp(10));
37 end
38
39
40 % Exakte Loesung plotten
41 fplot(u_exact,[0,1], 'r—'),hold on
42
43 % berechne FEM
44 for k=0:3
45     u=fem1dkomplett(coordinates,elements,dirichlet,a,b,c,f,u_d);
46 % FEM Loesung plotten
47     plot(coordinates(elements)',u(elements)', 'k-');
48     hold on;
49     pause;
50 % Verfeinere Gitter
51     coordinates=[coordinates;sum(coordinates(elements),2)/2];
52     n=size(elements,1);
```

```

53     elements = [[elements(:,1), (n+2:2*n+1)']; [(n+2:2*n+1)', elements(:,2)]];
54 end
55
56 %berechne letztes Mal FEM
57 u=femldkomplett(coordinates, elements, dirichlet, a, b, c, f, u_d);
58
59 % Plot of the FE-solution
60 plot(coordinates(elements)', u(elements)', 'k-'), hold on

```

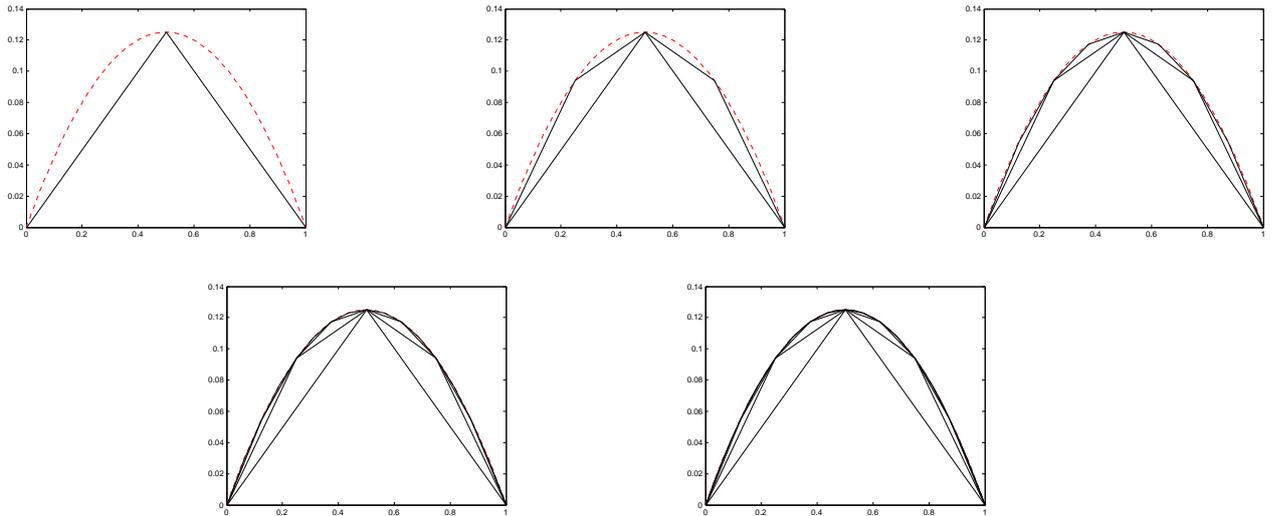


Abbildung 1: Teil a) In rot die exakte Lösung, in schwarz die numerische Lösung mit Finiten-Elementen. Man sieht, dass sich die numerische Lösung der exakten Lösung mit zunehmender Verfeinerung des Gitters annähert.

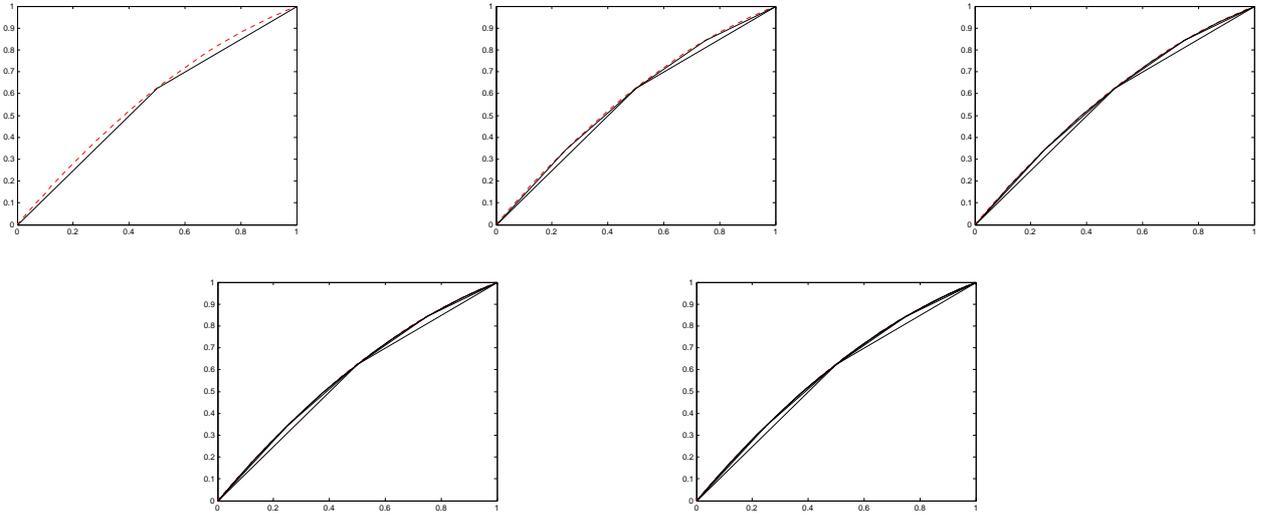


Abbildung 2: Teil b) In rot die exakte Lösung, in schwarz die numerische Lösung mit Finiten-Elementen. Man sieht, dass sich die numerische Lösung der exakten Lösung mit zunehmender Verfeinerung des Gitters annähert.

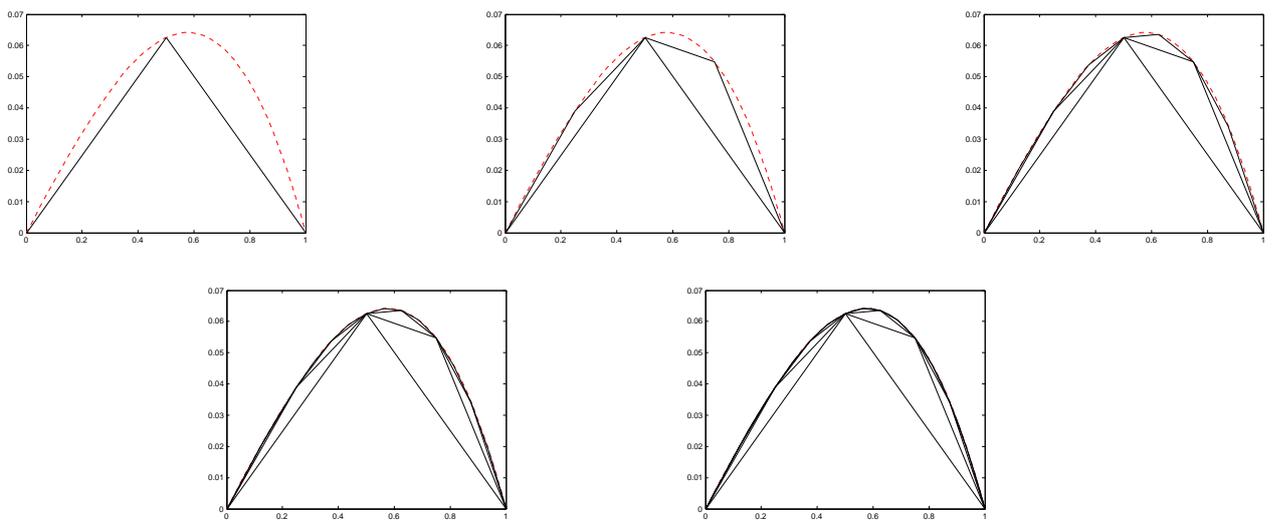


Abbildung 3: Teil c) In rot die exakte Lösung, in schwarz die numerische Lösung mit Finiten-Elementen. Man sieht, dass sich die numerische Lösung der exakten Lösung mit zunehmender Verfeinerung des Gitters annähert.

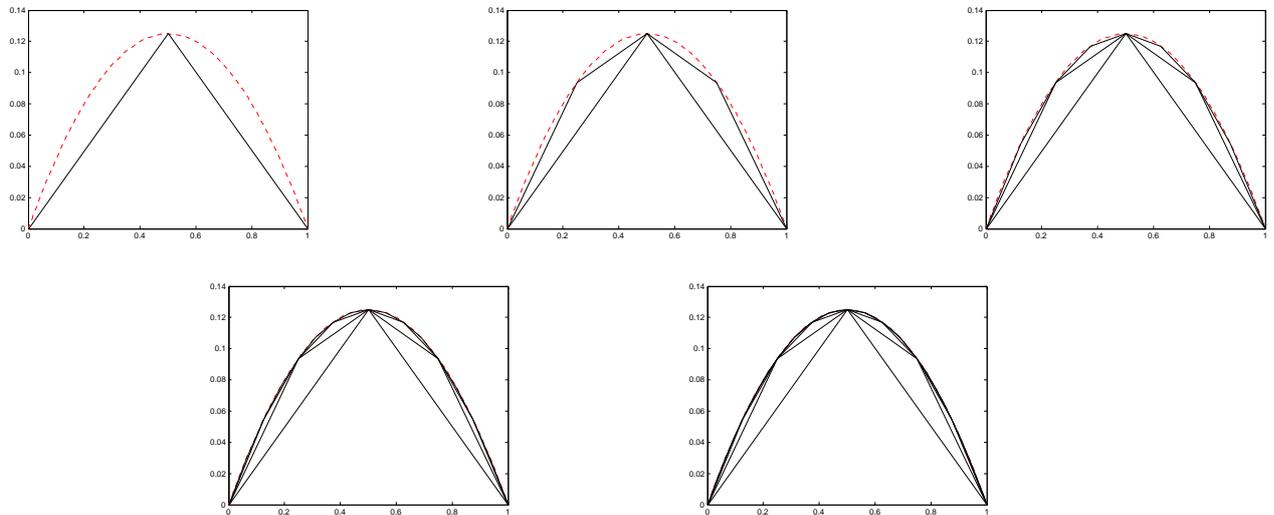


Abbildung 4: Teil d) In rot die exakte Lösung, in schwarz die numerische Lösung mit Finiten-Elementen. Man sieht, dass sich die numerische Lösung der exakten Lösung mit zunehmender verweinerung des Gitters annähert.

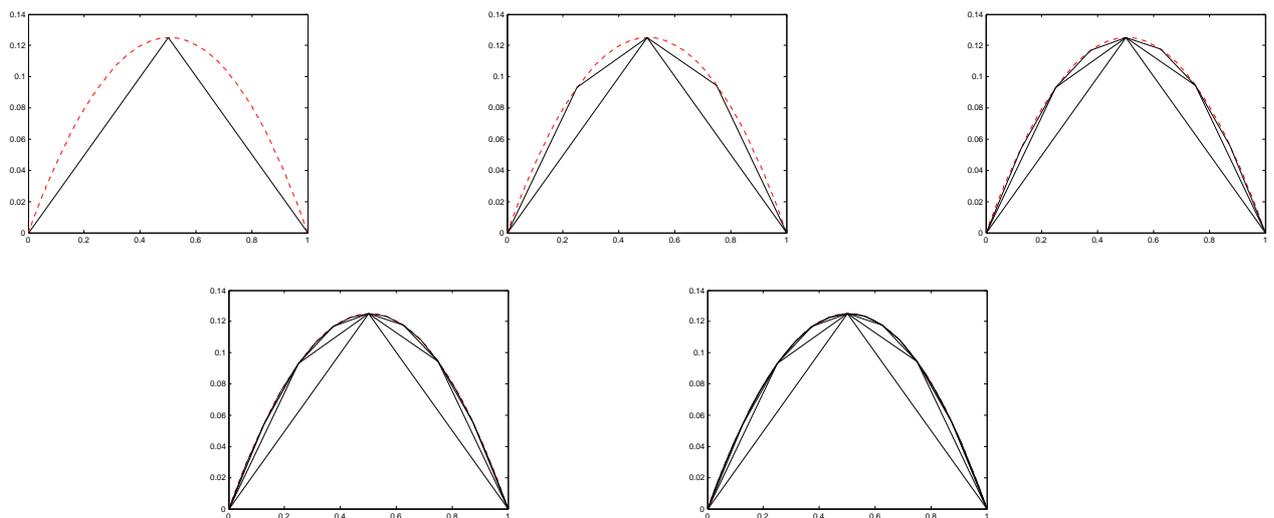


Abbildung 5: Teil e) In rot die exakte Lösung, in schwarz die numerische Lösung mit Finiten-Elementen. Man sieht, dass sich die numerische Lösung der exakten Lösung mit zunehmender verweinerung des Gitters annähert.

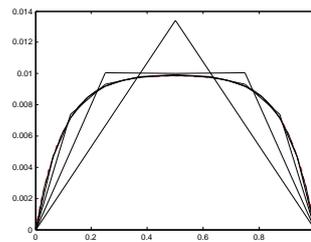
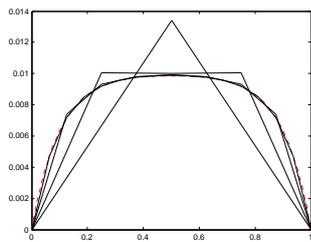
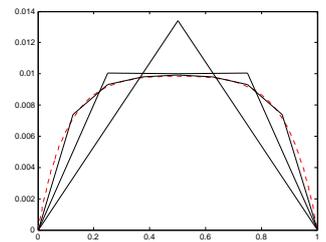
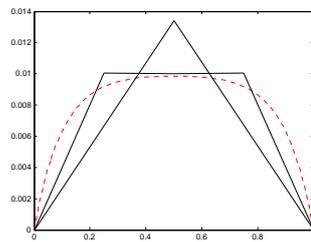
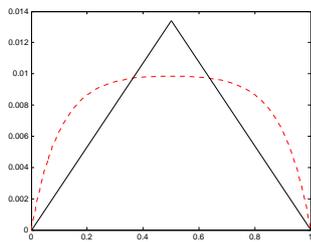


Abbildung 6: Teil f) In rot die exakte Lösung, in schwarz die numerische Lösung mit Finiten-Elementen. Man sieht, dass sich die numerische Lösung der exakten Lösung mit zunehmender Verfeinerung des Gitters annähert.