Prof. Dr. Stefan Funken
Dipl.-Math. Katharina Becker-Steinberger
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

WS 2013/2014
Lösungsblatt 12
31.01.2014

Angewandte Numerik 2

Raumänderung (Vorankündigung):
Am **07. Februar 2014** finden wegen der Promotionsfeier der Fakultät für Ingenieurwissenschaften und Informatik die Übungen zu Angewandte Numerik 2 im Raum 43.2.103 statt.

Aufgabe 27 *(Programmieraufgabe, Finite-Differenzen-Methode in 2D)* (8 Punkte)

Für das Gebiet Ω in Abbildung 1 sei die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta u(x,y) &= 1 \quad \text{in } \Omega \\ u(x,y) &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

gegeben.

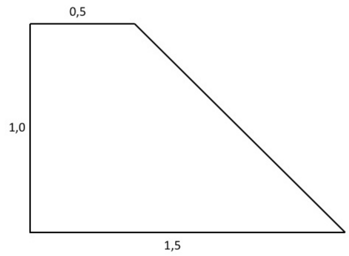

Abbildung 1: Trapezgebiet Ω

Lösen Sie diese Randwertaufgabe näherungsweise mit der Finite-Differenzen-Methode unter Verwendung des 5-Punkte-Sterns für die Netzweiten $h = \frac{1}{4}$, $h = \frac{1}{6}$ und $h = \frac{1}{8}$.

Lösungsvorschlag

Matlab-Programm

```
% % Angewandte Numerik 2, WS 2013/2014
% Blatt 12, Aufgabe 27: FDM in 2D, Trapezgebiet
%
% Loesungsvorschlag
%
% Hauptprogramm: Finite-Differenzen-Methode

clear all;
close all;

%% Initialisierungen

```

```
hs = [1/4 1/6 1/8];              % FDM fuer mehrere Netzweiten h testen

%% Schleife zum Testen fuer alle im Vektor hs angegebenen Netzweiten h

for hInd = 1:length(hs)
    h = hs(hInd);                % eine Netzweite waehlen

    N = 1.0/h - 1;               % N: Anzahl innere Netzpunkte in y-Richtung
    M = 1.5/h - 2;               % M: Anzahl innere Netzpunkte in x-Richtung
                                 % Beachte: Trapezgebiet hat bei unterster
                                 % Reihe bereits einen Netzpunkt weniger
    l = M*N - (N-1)*N/2;         % Anzahl innerer Netzpunkte im Trapezgebiet

    e = ones(M, 1);
    T = spdiags([-e, 4*e, -e], [-1, 0, 1], M, M);    % Tri-Diagonalblock


%% Steifigkeitsmatrix A aufstellen

    A = sparse(l, l);            % Steifigkeitsmatrix
    offset = 0;                  % zuerst links oben in A anfangen
    MTrapez = M;                 % und zwar mit einer vollen Zeile
    for j = 1:N                  % fuer jede Zeile einen Tri-Diagonalblock
        A(offset+[1:MTrapez], offset+[1:MTrapez]) = T;
        offset = offset + MTrapez;       % naechster Tridiagonalblock
        MTrapez = MTrapez-1;             % der  ist aber 1 kleiner
        T = T(1:MTrapez, 1:MTrapez);

        if (j ~= N)              % Die Nebendiagonalbloecke eintragen
            I = eye(MTrapez);    % Einheitsmatrix ist bereits 1 kleiner
            A(offset-MTrapez-1+[1:MTrapez], offset+[1:MTrapez]) = -I;
            A(offset+[1:MTrapez], offset-MTrapez-1+[1:MTrapez]) = -I;
        end
    end


%% rechte Seite b berechnen

    b = h^2*ones(l, 1);


%% Loesen des FDM-Gleichungssystems

    z = A\b;


%% Graphische Darstellung

    x = linspace(0, 1.5, M+3);
    y = linspace(0, 1.0, N+2);
    [xx, yy] = meshgrid(x, y);
    zz = zeros(size(xx));

    zIndex = 1;
```

```
    for j = 1:N                 % Trapezgebiet hat N Zeilen von inneren Punkten
                                % alle inneren Punkte der jewiligen Zeile
        zz (j+1, 2:M-j+2) = z(zIndex:zIndex+M-j);
        zIndex = zIndex+M-j+1;
    end
    for j = 2:N+1               % Trapezgebiet "ausschneiden"
        zz (j+1, M-j+5:M+3) = NaN;
    end

    figure(2*hInd-1);
    surf(xx, yy, zz);
    title(['FDM-L^sung␣f¸r␣Netzweite␣h=1/' num2str(1/h)], 'Fontsize', 14);
    xlabel('x', 'Fontsize', 14);
    ylabel('y', 'Fontsize', 14);
    zlabel('u(x,y)', 'Fontsize', 14);
    colorbar('vert');

    figure(2*hInd);
    spy(A);
    title(['Steifigkeitsmatrix␣der␣FDM-L^sung␣f¸r␣Netzweite␣h=1/' ...
                                num2str(1/h)], 'Fontsize', 14);
end                             % Verschiedene Netzweiten h
```

Näherungslösungen

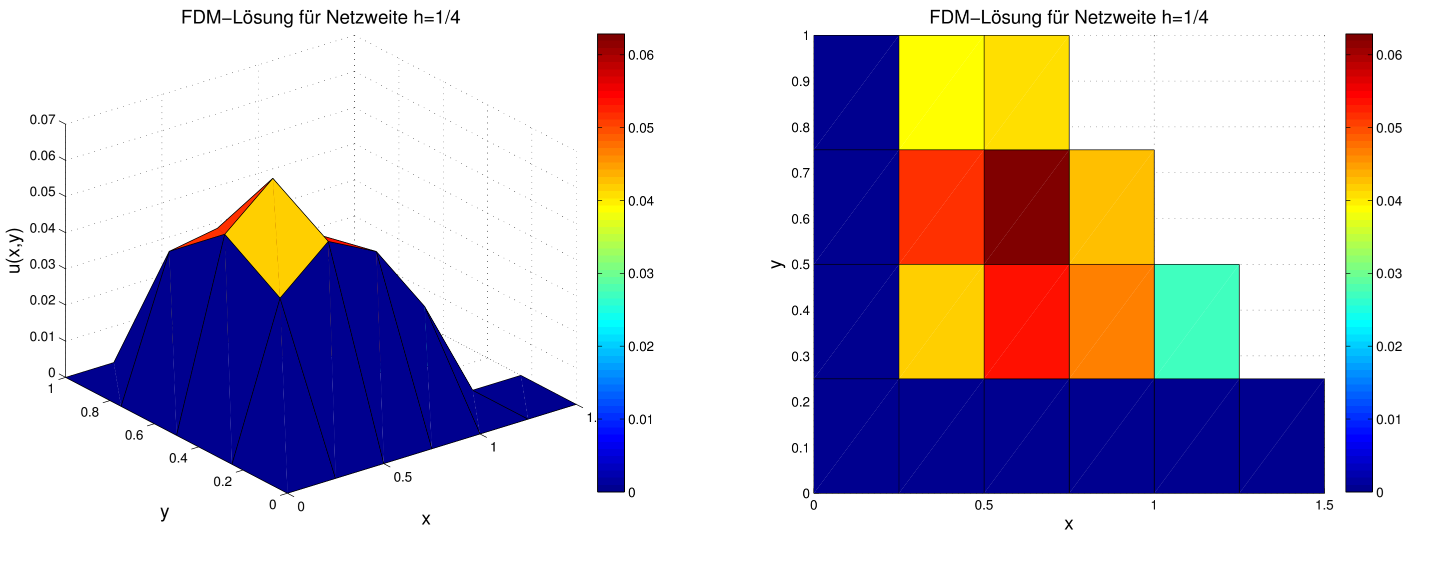

Abbildung 2: Lösungen für die Netzweite $h = \frac{1}{4}$

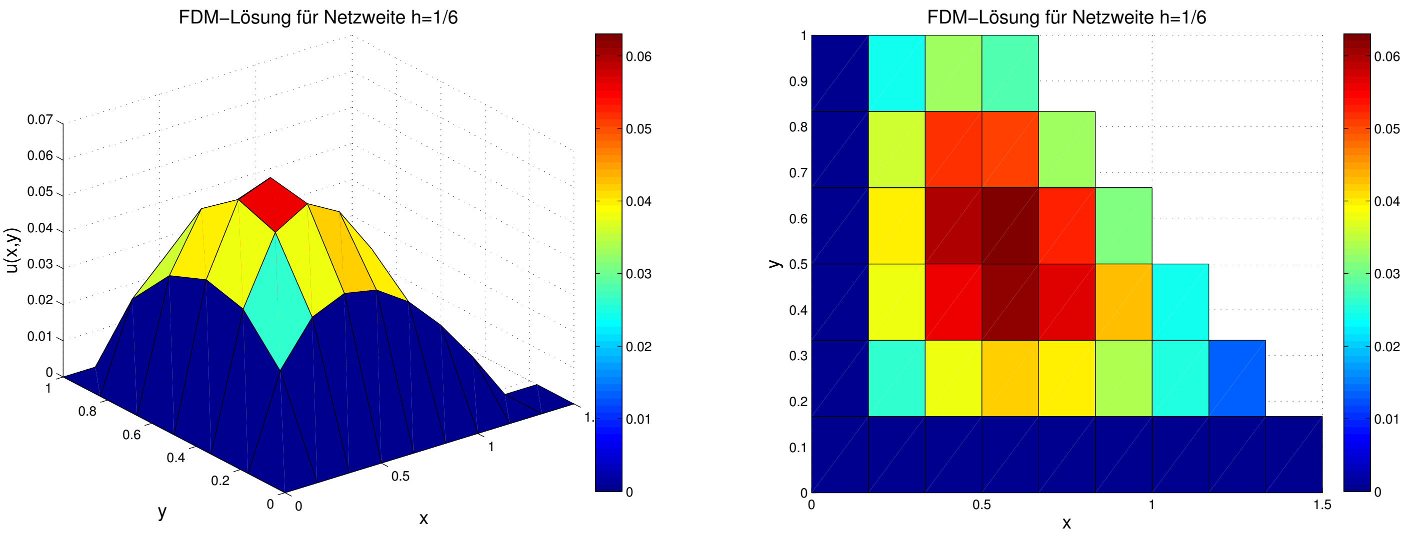

Abbildung 3: Lösungen für die Netzweite $h = \frac{1}{6}$

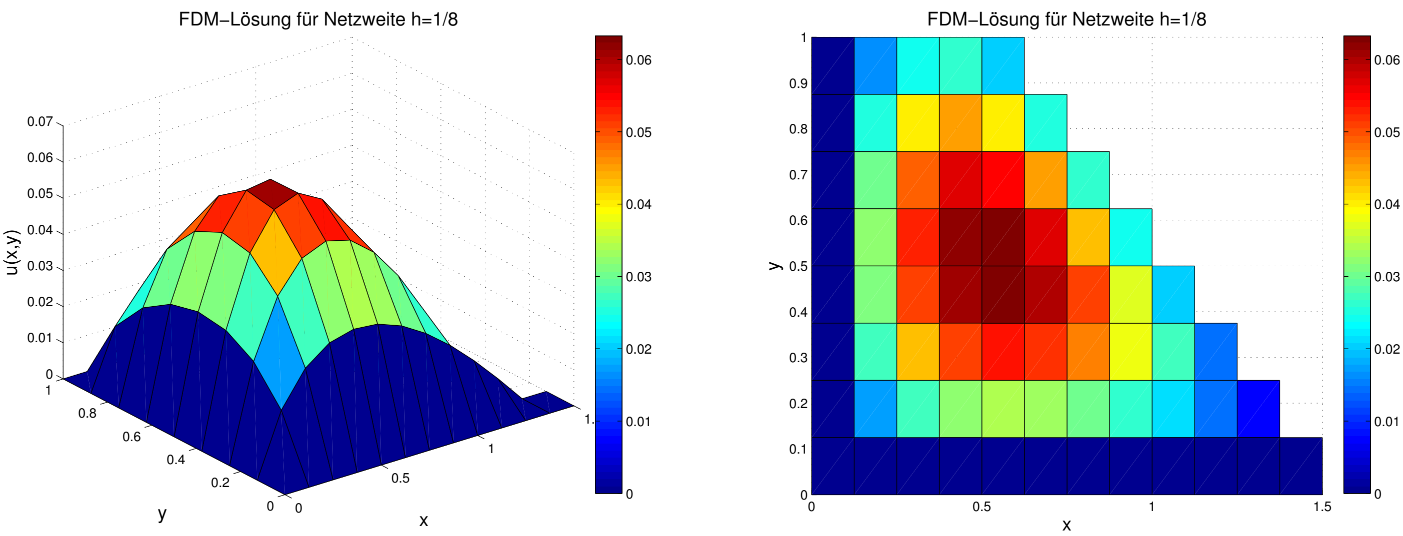

Abbildung 4: Lösungen für die Netzweite $h = \frac{1}{8}$

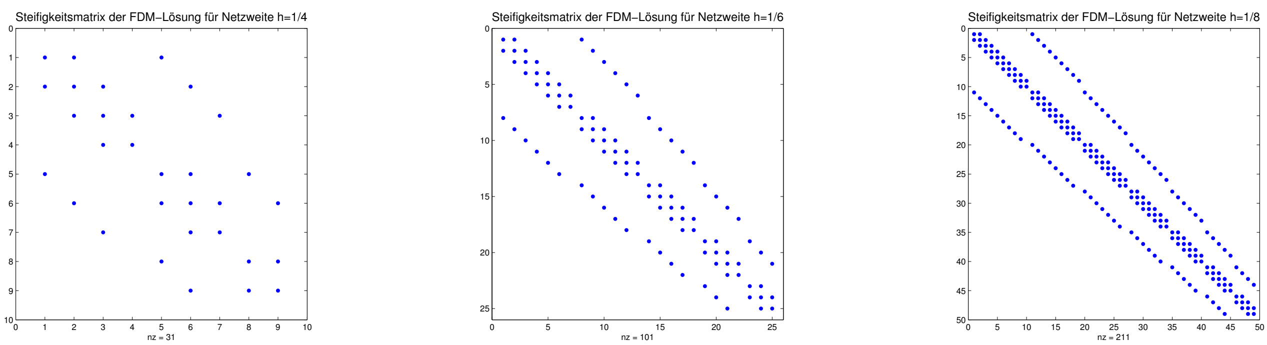

Abbildung 5: Struktur der Steifigkeitsmatrix

Aufgabe 28 *(Programmieraufgabe, Finite-Differenzen-Methode in 2D)* (8 Punkte)

Lösen Sie

$$\begin{aligned} -\Delta u(x,y) + s(x,y)\, u(x,y) &= 1 \quad \text{in } \Omega \\ u(x,y) &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

analog zu Aufgabe 27 mit $s(x,y) = 1$ bzw. $s(x,y) = 1 + 2x$. für die Netzweiten $h = \frac{1}{4}$, $h = \frac{1}{6}$ und $h = \frac{1}{8}$.

Lösungsvorschlag

Matlab-Programm

```
% % Angewandte Numerik 2, WS 2013/2014
% Blatt 12, Aufgabe 28: FDM in 2D, Trapezgebiet
%
% Loesungsvorschlag
%
% Hauptprogramm: Finite-Differenzen-Methode

clear all;
close all;

%% Initialisierungen

hs = [1/4 1/6 1/8];                % FDM fuer mehrere Netzweiten h testen


%% Schleife zum Testen fuer alle im Vektor hs angegebenen Netzweiten h

for hInd = 1:length(hs)
    h = hs(hInd);                  % eine Netzweite waehlen

    N = 1.0/h - 1;                 % N: Anzahl innere Netzpunkte in y-Richtung
    M = 1.5/h - 2;                 % M: Anzahl innere Netzpunkte in x-Richtung
                                   % Beachte: Trapezgebiet hat bei unterster
                                   % Reihe bereits einen Netzpunkt weniger
    l = M*N - (N-1)*N/2;           % Anzahl innerer Netzpunkte im Trapezgebiet

    e = ones(M, 1);
    T = spdiags([-e, 4*e, -e], [-1, 0, 1], M, M);    % Tri-Diagonalblock


%% Steifigkeitsmatrix A aufstellen

    A = sparse(l, l);              % Steifigkeitsmatrix
    offset = 0;                    % zuerst links oben in A anfangen
    MTrapez = M;                   % und zwar mit einer vollen Zeile
    for j = 1:N                    % fuer jede Zeile einen Tri-Diagonalblock
        A(offset+[1:MTrapez], offset+[1:MTrapez]) = T;
        offset = offset + MTrapez;         % naechster Tridiagonalblock
        MTrapez = MTrapez-1;               % der ist aber 1 kleiner
        T = T(1:MTrapez, 1:MTrapez);

        if (j ~= N)                % Die Nebendiagonalbloecke eintragen
```

```
            I = eye(MTrapez);    % Einheitsmatrix ist bereits 1 kleiner
            A(offset-MTrapez-1+[1:MTrapez], offset+[1:MTrapez]) = -I;
            A(offset+[1:MTrapez], offset-MTrapez-1+[1:MTrapez]) = -I;
        end
    end


%% rechte Seite b berechnen

    b = h^2*ones(l, 1);


%% zwei verschiedene Funktionen s betrachten

    for func = 1:2
        switch func
            case 1
                funcName = 'Funktion s(x,y) = 1';
                s = @(x,y) ones(length(x)*length(y),1);
            case 2
                funcName = 'Funktion s(x,y) = 1 + 2x';
                s = @(x,y) (1 + 2.*x)*length(y);
            otherwise
                error('Es gibt diesen Wert fuer func nicht.');
        end


%% Aufstellen der aus s(x,y)*u(x,y) resultierenden Matrix

        c = zeros(l,1);
        offset = 0;                     % zuerst links oben in S anfangen
        MTrapez = M;                    % und zwar mit einer vollen Zeile
        for j = 1:N                     % alle Zeilen des Gebiets durchlaufen
            for i = 1:MTrapez
                c(offset+i) = s(i*h, j*h);
            end
            offset = offset + MTrapez;  % naechste Zeile
            MTrapez = MTrapez-1;
        end
        C = spdiags(c, 0, l, l);


%% Loesen des FDM-Gleichungssystems

        z = (A+C)\b;


%% Graphische Darstellung

        x = linspace(0, 1.5, M+3);
        y = linspace(0, 1.0, N+2);
        [xx, yy] = meshgrid(x, y);
        zz = zeros(size(xx));

```

```
        zIndex = 1;
        for j = 1:N           % Trapezgebiet hat N Zeilen von inneren Punkten
                              % alle inneren Punkte der jewiligen Zeile
            zz (j+1, 2:M-j+2) = z(zIndex:zIndex+M-j);
            zIndex = zIndex+M-j+1;
        end
        for j = 2:N+1             % Trapezgebiet "ausschneiden"
            zz (j+1, M-j+5:M+3) = NaN;
        end

        figure(((hInd-1)*3)+func);
        surf(xx, yy, zz);
        title(['FDM-L^sung␣f¸r␣Netzweite␣h=1/' num2str(1/h) '␣und␣' funcName], ...
              'Fontsize', 14);
        xlabel('x', 'Fontsize', 14);
        ylabel('y', 'Fontsize', 14);
        zlabel('u(x,y)', 'Fontsize', 14);
        colorbar('vert');
    end                       % zwei Funktionen s

    figure(((hInd-1)*3)+3);
    spy(A);
    title(['Steifigkeitsmatrix␣der␣FDM-L^sung␣f¸r␣Netzweite␣h=1/' ...
                              num2str(1/h)], 'Fontsize', 14);
end                           % Verschiedene Netzweiten h
```

Näherungslösungen

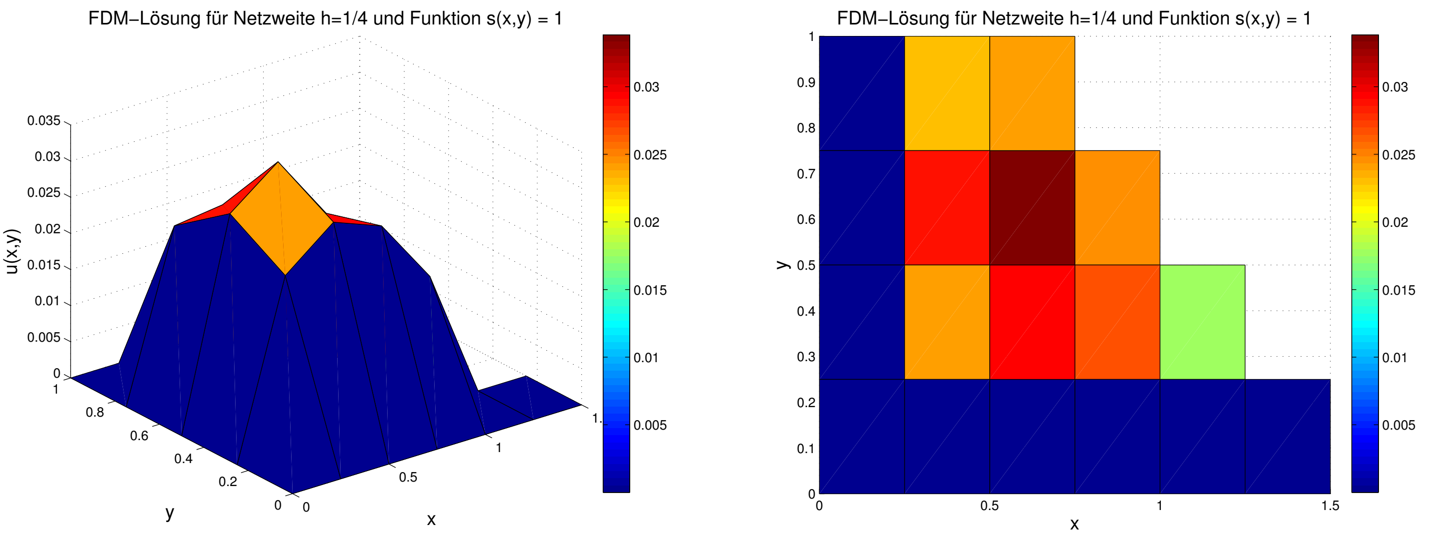

Abbildung 6: Lösungen für die Netzweite $h = \frac{1}{4}$ und $s(x, y) = 1$

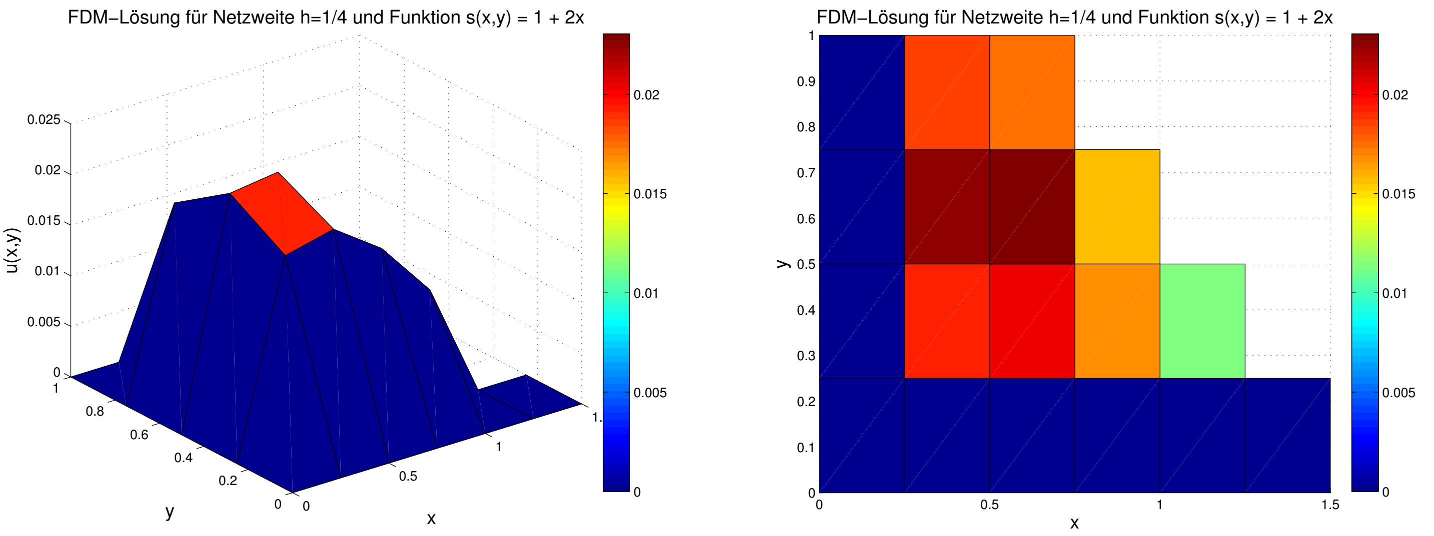

Abbildung 7: Lösungen für die Netzweite $h = \frac{1}{4}$ und $s(x, y) = 1 + 2x$

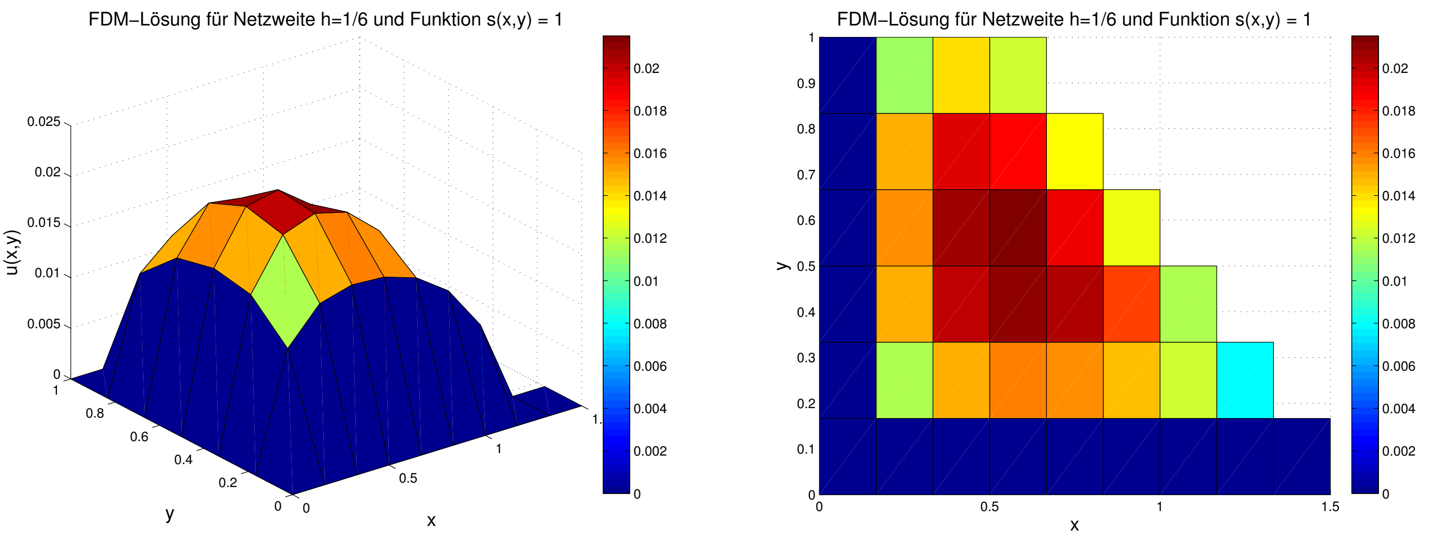

Abbildung 8: Lösungen für die Netzweite $h = \frac{1}{6}$ und $s(x, y) = 1$

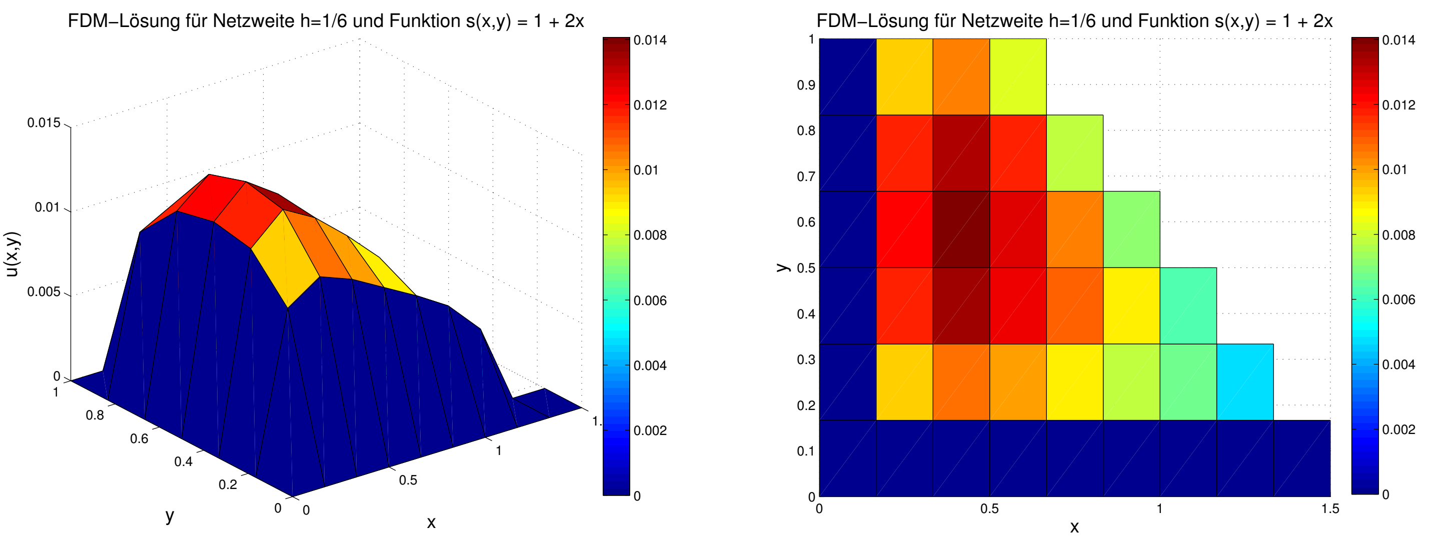

Abbildung 9: Lösungen für die Netzweite $h = \frac{1}{6}$ und $s(x, y) = 1 + 2x$

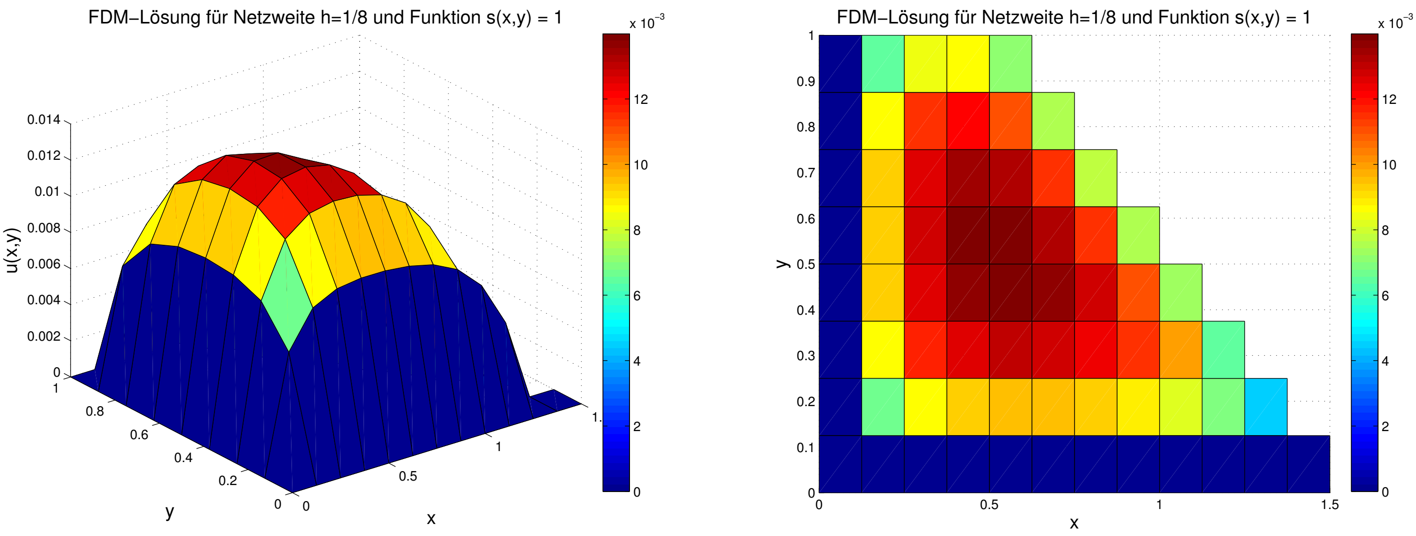

Abbildung 10: Lösungen für die Netzweite $h = \frac{1}{8}$ und $s(x, y) = 1$

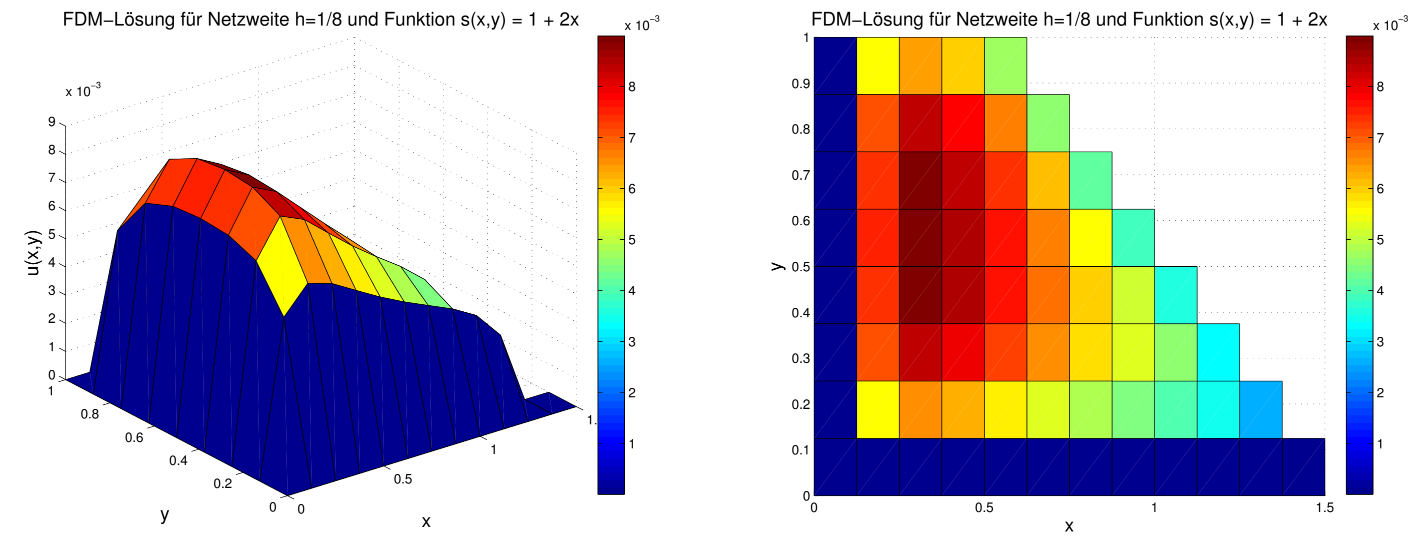

Abbildung 11: Lösungen für die Netzweite $h = \frac{1}{8}$ und $s(x, y) = 1 + 2x$

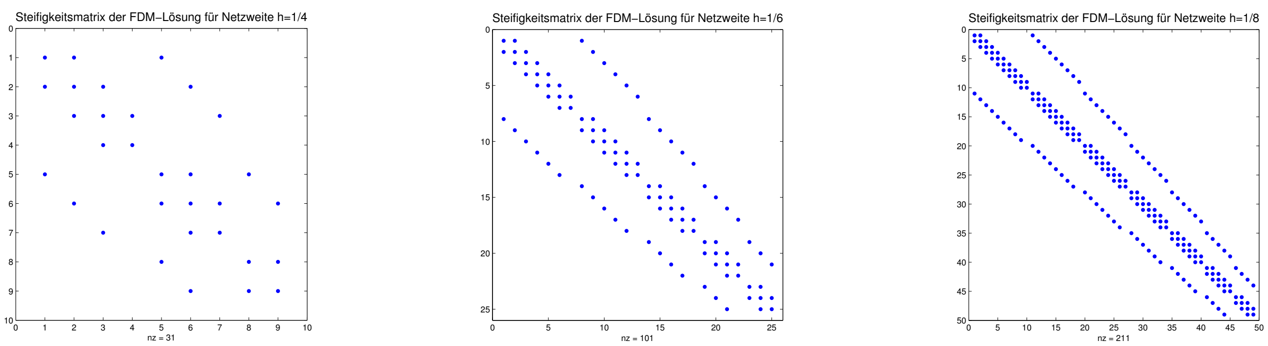

Abbildung 12: Struktur der Steifigkeitsmatrix

Aufgabe 29 *(Finite-Differenzen-Methode in 2D, 9-Punkte-Stern)* (8 Punkte)

Zeigen Sie, dass für hinreichend glattes u mit $-\Delta u = f$

$$\begin{aligned}20u(x,y) &- 4\left(u(x-h,y)+u(x+h,y)+u(x,y+h)+u(x,y-h)\right)\\ &-\left(u(x-h,y-h)+u(x+h,y+h)+u(x-h,y+h)+u(x+h,y-h)\right)\\ &+6h^2 f(x,y)+\frac{h^4}{2}\left(\Delta f(x,y)\right)=0\end{aligned}$$

gilt.

Beachten Sie: $u_{xxxx}+2u_{xxyy}+u_{yyyy}=-\Delta f$.

Lösungsvorschlag

Für $u(x+h,y)$, $u(x-h,y)$, $u(x,y+h)$ und $u(x,y-h)$ gelten die Taylorentwicklungen

$$\begin{aligned}u(x+h,y) &= u(x,y)+hu_x+\frac{h^2}{2!}u_{xx}+\frac{h^3}{3!}u_{xxx}+\frac{h^4}{4!}u_{xxxx}+\frac{h^5}{5!}u_{xxxxx}+\mathcal{O}(h^6)\\ u(x-h,y) &= u(x,y)-hu_x+\frac{h^2}{2!}u_{xx}-\frac{h^3}{3!}u_{xxx}+\frac{h^4}{4!}u_{xxxx}-\frac{h^5}{5!}u_{xxxxx}+\mathcal{O}(h^6)\\ u(x,y+h) &= u(x,y)+hu_y+\frac{h^2}{2!}u_{yy}+\frac{h^3}{3!}u_{yyy}+\frac{h^4}{4!}u_{yyyy}+\frac{h^5}{5!}u_{yyyyy}+\mathcal{O}(h^6)\\ u(x,y-h) &= u(x,y)-hu_y+\frac{h^2}{2!}u_{yy}-\frac{h^3}{3!}u_{yyy}+\frac{h^4}{4!}u_{yyyy}-\frac{h^5}{5!}u_{yyyyy}+\mathcal{O}(h^6).\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die beiden Gleichungen

$$u(x+h,y)+u(x-h,y) \;=\; 2u(x,y)+2\frac{h^2}{2!}u_{xx}+2\frac{h^4}{4!}u_{xxxx}+\mathcal{O}(h^6) \tag{1}$$

$$u(x,y+h)+u(x,y-h) \;=\; 2u(x,y)+2\frac{h^2}{2!}u_{yy}+2\frac{h^4}{4!}u_{yyyy}+\mathcal{O}(h^6). \tag{2}$$

Für $u(x+h,y+h)$ lautet die Taylorentwicklung

$$\begin{aligned}u(x+h,y+h) = u(x,y)&+hu_x+hu_y+\frac{h^2}{2!}(u_{xx}+u_{xy}+u_{yx}+u_{yy})\\ &+\frac{h^3}{3!}(u_{xxx}+u_{xxy}+u_{xyx}+u_{xyy}+u_{yxx}+u_{yxy}+u_{yyx}+u_{yyy})\\ &+\frac{h^4}{4!}(u_{xxxx}+u_{xxxy}+u_{xxyx}+u_{xxyy}+u_{xyxx}+u_{xyxy}+u_{xyyx}+u_{xyyy}\\ &\quad+u_{yxxx}+u_{yxxy}+u_{yxyx}+u_{yxyy}+u_{yyxx}+u_{yyxy}+u_{yyyx}+u_{yyyy})\\ &+\frac{h^5}{5!}(u_{xxxxx}+u_{xxxxy}+u_{xxxyx}+u_{xxxyy}+u_{xxyxx}+u_{xxyxy}+u_{xxyyx}+u_{xxyyy}\\ &\quad+u_{xyxxx}+u_{xyxxy}+u_{xyxyx}+u_{xyxyy}+u_{xyyxx}+u_{xyyxy}+u_{xyyyx}+u_{xyyyy}\\ &\quad+u_{yxxxx}+u_{yxxxy}+u_{yxxyx}+u_{yxxyy}+u_{yxyxx}+u_{yxyxy}+u_{yxyyx}+u_{yxyyy}\\ &\quad+u_{yyxxx}+u_{yyxxy}+u_{yyxyx}+u_{yyxyy}+u_{yyyxx}+u_{yyyxy}+u_{yyyyx}+u_{yyyyy})\\ &+\mathcal{O}(h^6)\\ = u(x,y)&+hu_x+hu_y+\frac{h^2}{2!}(u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy})+\frac{h^3}{3!}(u_{xxx}+3u_{xxy}+3u_{xyy}+u_{yyy})\\ &+\frac{h^4}{4!}(u_{xxxx}+4u_{xxxy}+6u_{xxyy}+4u_{xyyy}+u_{yyyy})\\ &+\frac{h^5}{5!}(u_{xxxxx}+5u_{xxxxy}+10u_{xxxyy}+10u_{xxyyy}+5u_{xyyyy}+5u_{yyyyy})+\mathcal{O}(h^6)\end{aligned} \tag{3}$$

Analog erhält man

$$\begin{aligned}
u(x+h,y-h) \quad &= u(x,y) + hu_x - hu_y + \frac{h^2}{2!}(u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy}) + \frac{h^3}{3!}(u_{xxx} - 3u_{xxy} + 3u_{xyy} - u_{yyy}) \\
&\quad + \frac{h^4}{4!}(u_{xxxx} - 4u_{xxxy} + 6u_{xxyy} - 4u_{xyyy} + u_{yyyy}) \\
&\quad + \frac{h^5}{5!}(u_{xxxxx} - 5u_{xxxxy} + 10u_{xxxyy} - 10u_{xxyyy} + 5u_{xyyyy} - 5u_{yyyyy}) + \mathcal{O}(h^6) \qquad (4) \\
u(x-h,y+h) \quad &= u(x,y) - hu_x + hu_y + \frac{h^2}{2!}(u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy}) + \frac{h^3}{3!}(-u_{xxx} + 3u_{xxy} - 3u_{xyy} + u_{yyy}) \\
&\quad + \frac{h^4}{4!}(u_{xxxx} - 4u_{xxxy} + 6u_{xxyy} - 4u_{xyyy} + u_{yyyy}) \\
&\quad + \frac{h^5}{5!}(-u_{xxxxx} + 5u_{xxxxy} - 10u_{xxxyy} + 10u_{xxyyy} - 5u_{xyyyy} + 5u_{yyyyy}) + \mathcal{O}(h^6) \qquad (5) \\
u(x-h,y-h) \quad &= u(x,y) - hu_x - hu_y + \frac{h^2}{2!}(u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy}) + \frac{h^3}{3!}(-u_{xxx} - 3u_{xxy} - 3u_{xyy} - u_{yyy}) \\
&\quad + \frac{h^4}{4!}(u_{xxxx} + 4u_{xxxy} + 6u_{xxyy} + 4u_{xyyy} + u_{yyyy}) \\
&\quad + \frac{h^5}{5!}(-u_{xxxxx} - 5u_{xxxxy} - 10u_{xxxyy} - 10u_{xxyyy} - 5u_{xyyyy} - 5u_{yyyyy}) + \mathcal{O}(h^6). \qquad (6)
\end{aligned}$$

Setzen wir (3) bis (6) zusammen, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
&u(x+h,y+h) + u(x+h,y-h) + u(x-h,y+h) + u(x-h,y-h) \\
&\quad = u(x,y) + hu_x + hu_y + \frac{h^2}{2!}(u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy}) + \frac{h^3}{3!}(u_{xxx} + 3u_{xxy} + 3u_{xyy} + u_{yyy}) \\
&\qquad + \frac{h^4}{4!}(u_{xxxx} + 4u_{xxxy} + 6u_{xxyy} + 4u_{xyyy} + u_{yyyy}) \\
&\qquad + \frac{h^5}{5!}(u_{xxxxx} + 5u_{xxxxy} + 10u_{xxxyy} + 10u_{xxyyy} + 5u_{xyyyy} + 5u_{yyyyy}) \\
&\qquad + u(x,y) + hu_x - hu_y + \frac{h^2}{2!}(u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy}) + \frac{h^3}{3!}(u_{xxx} - 3u_{xxy} + 3u_{xyy} - u_{yyy}) \\
&\qquad + \frac{h^4}{4!}(u_{xxxx} - 4u_{xxxy} + 6u_{xxyy} - 4u_{xyyy} + u_{yyyy}) \\
&\qquad + \frac{h^5}{5!}(u_{xxxxx} - 5u_{xxxxy} + 10u_{xxxyy} - 10u_{xxyyy} + 5u_{xyyyy} - 5u_{yyyyy}) \\
&\qquad + u(x,y) - hu_x + hu_y + \frac{h^2}{2!}(u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy}) + \frac{h^3}{3!}(-u_{xxx} + 3u_{xxy} - 3u_{xyy} + u_{yyy}) \\
&\qquad + \frac{h^4}{4!}(u_{xxxx} - 4u_{xxxy} + 6u_{xxyy} - 4u_{xyyy} + u_{yyyy}) \\
&\qquad + \frac{h^5}{5!}(-u_{xxxxx} + 5u_{xxxxy} - 10u_{xxxyy} + 10u_{xxyyy} - 5u_{xyyyy} + 5u_{yyyyy}) \\
&\qquad + u(x,y) - hu_x - hu_y + \frac{h^2}{2!}(u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy}) + \frac{h^3}{3!}(-u_{xxx} - 3u_{xxy} - 3u_{xyy} - u_{yyy}) \\
&\qquad + \frac{h^4}{4!}(u_{xxxx} + 4u_{xxxy} + 6u_{xxyy} + 4u_{xyyy} + u_{yyyy}) \\
&\qquad + \frac{h^5}{5!}(-u_{xxxxx} - 5u_{xxxxy} - 10u_{xxxyy} - 10u_{xxyyy} - 5u_{xyyyy} - 5u_{yyyyy}) + \mathcal{O}(h^6) \\
&\quad = 4u(x,y) + \frac{h^2}{2!}(4u_{xx} + 4u_{yy}) + \frac{h^4}{4!}(4u_{xxxx} + 24u_{xxyy} + 4u_{yyyy}) + \mathcal{O}(h^6) \\
&\quad = 4u(x,y) + 2h^2(u_{xx} + u_{yy}) + \frac{4h^4}{4!}(u_{xxxx} + 6u_{xxyy} + u_{yyyy}) + \mathcal{O}(h^6) \qquad (7)
\end{aligned}$$

Aus (1), (2) und (7) folgt insgesamt

$$\begin{aligned}
20u(x,y) &- 4\left(u(x-h,y)+u(x+h,y)+u(x,y+h)+u(x,y-h)\right) \\
&- \left(u(x-h,y-h)+u(x+h,y+h)+u(x-h,y+h)+u(x+h,y-h)\right) \\
&- 6h^2 f(x,y) - \frac{h^4}{2}\left(\Delta f(x,y)\right) \\
&= 20u - 4(2u + h^2 u_{xx} + \frac{2h^4}{4!}u_{xxxx} + 2u + h^2 u_{yy} + \frac{2h^4}{4!}u_{yyyy}) \\
&- \left(4u + 2h^2(u_{xx}+u_{yy}) + \frac{4h^4}{4!}(u_{xxxx} + 6u_{xxyy} + u_{yyyy})\right) + \mathcal{O}(h^6) \\
&- 6h^2 f(x,y) - \frac{h^4}{2}\left(\Delta f(x,y)\right) \\
&= -6h^2(u_{xx}+u_{yy}) - \frac{12h^4}{4!}(u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy}) + \mathcal{O}(h^6) \\
&- 6h^2 f(x,y) - \frac{h^4}{2}\left(\Delta f(x,y)\right) \\
&= -6h^2(u_{xx}+u_{yy}) - \frac{h^4}{2}(u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy}) + \mathcal{O}(h^6) \\
&- 6h^2 f(x,y) - \frac{h^4}{2}\left(\Delta f(x,y)\right)
\end{aligned}$$

Berücksichtigen wir jetzt noch $-f(x,y) = \Delta u(x,y) = u_{xx} + u_{yy}$ und $-\Delta f(x,y) = \Delta(\Delta u(x,y)) = u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
20u(x,y) &- 4\left(u(x-h,y)+u(x+h,y)+u(x,y+h)+u(x,y-h)\right) \\
&- \left(u(x-h,y-h)+u(x+h,y+h)+u(x-h,y+h)+u(x+h,y-h)\right) \\
&- 6h^2 f(x,y) - \frac{h^4}{2}\left(\Delta f(x,y)\right) \\
&= -6h^2(u_{xx}+u_{yy}) - \frac{h^4}{2}(u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy}) + \mathcal{O}(h^6) \\
&- 6h^2 f(x,y) - \frac{h^4}{2}\left(\Delta f(x,y)\right) \\
&= -6h^2(u_{xx}+u_{yy}) - \frac{h^4}{2}(u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy}) + \mathcal{O}(h^6) \\
&+ 6h^2(u_{xx}+u_{yy}) + \frac{h^4}{2}(u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy}) \\
&= \mathcal{O}(h^6)
\end{aligned}$$

□