Prof. Dr. Stefan Funken
Dipl.-Math. Katharina Becker-Steinberger
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

WS 2013/2014
Blatt 13
31.01.2014

Angewandte Numerik 2

Abgabetermin: Freitag 07.02.2014, **vor der Übung**

Raumänderung (Vorankündigung):
Am **07. Februar 2014** finden wegen der Promotionsfeier der Fakultät für Ingenieurwissenschaften und Informatik die Übungen zu Angewandte Numerik 2 im Raum 43.2.103 statt.

Aufgabe 30 *(Programmieraufgabe, Finite Elemente 1D mit Neumann Randbedingungen)* (8 Punkte)

Wir betrachten noch einmal Aufgabe 26 von Blatt 11. Dort hatten wir eine Finite-Elemente-Methode in 1D für das folgende Problem programmiert:

$$\begin{aligned} -\big(a(x)u'(x)\big)' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) &= f \quad x \in \Omega = (0,1) \\ u(0) &= u_D(0) \\ u(1) &= u_D(1) \end{aligned}$$

a) Wir ersetzen nun die Dirichlet-Randbedingungen am rechten Rand durch Neumann-Randbedingungen. Wie lautet die schwache Form des Problems, wenn statt $u(1) = u_D(1)$ Neumann Bedingungen gefordert werden: $u'(1) = g$?

b) Laden Sie das Material von der Homepage herunter. Ändern Sie die Dateien so, dass auch Neumann-Bedingungen betrachtet werden können. Schreiben Sie Ihr Programm dabei so flexibel, dass die Neumann Bedingungen wahlweise am linken oder am rechten Rand gesetzt werden können.

c) Testen Sie das Programm mit folgenden Daten:

- $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $f = 1$ und $u(0) = 0$, $u'(1) = 0.5$,
- $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$, $f = 0$ und $u(0) = 1$, $u'(1) = 1$,
- $a = 1$, $b = 0.1$, $c = 0$, $f = x$ und $u(0) = 1$, $u'(1) = -0.25$,

d) Testen Sie Ihr Programm außerdem mit

- $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $f = 1$ und $u'(0) = u'(1) = 0$

Wo liegt das Problem, wenn am linken und am rechten Rand Neumann-Bedingungen gestellt werden? Erklären Sie, wo das Problem analytisch liegt und erläutern Sie ebenfalls, was dies für die Matrizen im Algorithmus bedeutet.

Lösung

a) Betrachte das Diffusions-Konvektions-Reaktions-Problem mit inhomogenen Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen

$$\begin{aligned} -au'' + bu' + cu &= f, \quad x \in \Omega = (0,1), \\ u(0) &= u_D(0), \\ u'(1) &= g. \end{aligned}$$

Homogenisierung: Definiere $u := u_0 + \tilde{u}_D$ mit

$$\begin{aligned} u_0 &\in H^1_{(0)}(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) | u(0) = 0\}, \\ \tilde{u}_D &\in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

Schwache Formulierung: Multipliziere mit Testfunktion $v \in H^1_{(0)}(\Omega)$ und integriere partiell:

$$\begin{aligned} -a \int_0^1 u'' v \, dx + b \int_0^1 u' v \, dx + c \int_0^1 uv \, dx &\overset{\text{PI}}{=} a \int_0^1 u' v' \, dx - [u'v]_0^1 + b \int_0^1 u' v \, dx + c \int_0^1 uv \, dx \\ &= a \int_0^1 u' v' \, dx - gv(1) + \underbrace{u_0'(0) v(0)}_{=0, \text{ da } v \in H^1_{(0)}(\Omega)} + b \int_0^1 u' v \, dx + c \int_0^1 uv \, dx \end{aligned}$$

Einsetzen von $u = u_0 + \tilde{u}_D$ und bekannte Terme auf die rechte Seite bringen liefert die schwache Formulierung des Problems mit gemischten Randbedingungen.
Finde $u_0 \in H^1_{(0)}(\Omega)$

$$\tilde{a}(u_0, v) = \tilde{f}(v) - a(\tilde{u}_D, v) \quad \forall v \in H^1_{(0)}(\Omega)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{a}(u, v) &:= a \int_0^1 u' v' \, dx + b \int_0^1 u' v \, dx + c \int_0^1 uv \, dx, \\ \tilde{f}(v) &:= \int_0^1 fv \, dx + gv(1). \end{aligned}$$

b)

```
function u=fem1dkomplett(coordinates,elements,dirichlet,neumann,a,b,c,f,u_d,u_n)

N=size(elements,1);
A=sparse(N+1,N+1);
B=sparse(N+1,N+1);
C=sparse(N+1,N+1);
rhs=zeros(N+1,1);
u=zeros(N+1,1);

% Aufstellen der Steifigkeitsmatrix
for j=1:N
   x=coordinates(elements(j,:));
   A(elements(j,:),elements(j,:))=A(elements(j,:),elements(j,:))+...
      a/(x(2)-x(1))*[1 -1;-1 1];
   B(elements(j,:),elements(j,:))=B(elements(j,:),elements(j,:))+...
      b/2*[-1 1;-1 1];
   C(elements(j,:),elements(j,:))=C(elements(j,:),elements(j,:))+...
      c*(x(2)-x(1))/6*[2 1;1 2];
end
% Rechte Seite
for j=1:N
   x=coordinates(elements(j,:));
   rhs([elements(j,1);elements(j,2)])=rhs([elements(j,1);elements(j,2)])+...
     (x(2)-x(1))/2*f((x(1)+x(2))/2);
end

```

```
% HIER NEUMANN BEDINGUNG EINBAUEN
rhs(neumann) = rhs(neumann) + a*u_n;


% Dirichlet Bedingungen
u(dirichlet)=u_d;

% Berechnung der Loesung
%C=diag(sum(C'));
M=A+B+C;
freenodes=setdiff(1:size(elements,1)+1,dirichlet);

rhs=rhs-M*u;

u(freenodes)=M(freenodes,freenodes)\rhs(freenodes);
```

```
function solve_1dfem
% Matlab Programm fuer 1D- Problem
% -au''+bu'+cu=f in (0,1)
% a,b,c konstant

clear all;
close all;

% Netz laden
load coordinates.dat
load elements.dat



teil = 'c';

switch teil
  case 'a'
    dirichlet = 1; neumann = 3;
    a=1;b=0;c=0; u_d=0; u_n=0.5; f = @(x) 1;
  case 'b'
    dirichlet = 1; neumann = 3;
    a=1;b=0;c=1; u_d=1; u_n=1; f = @(x) 0;
  case 'c'
    dirichlet = 1; neumann = 3;
    a=1;b=0.1;c=0; u_d=1; u_n=-0.25; f = @(x) x;
  case 'd'
    %...tbd...
    dirichlet = [];
    neumann = [1,3];
    a=1;b=0;c=0;    u_d=[]; u_n=1; f = @(x) 1;
end



% berechne FEM
for k=0:3
  u=fem1dkomplett(coordinates,elements,dirichlet,neumann,a,b,c,f,u_d,u_n);
```

```
% FEM Loesung plotten
   plot(coordinates(elements)',u(elements)','k-');
   hold on;
   pause;
% Verfeinere Gitter
   coordinates=[coordinates;sum(coordinates(elements),2)/2];
   n=size(elements,1);
   elements=[[elements(:,1),(n+2:2*n+1)'];[(n+2:2*n+1)',elements(:,2)]];
end

%berechne letztes Mal FEM
u=fem1dkomplett(coordinates,elements,dirichlet,neumann,a,b,c,f,u_d,u_n);

% Plot of the FE-solution
 plot(coordinates(elements)',u(elements)','k-'),hold on
```

c)

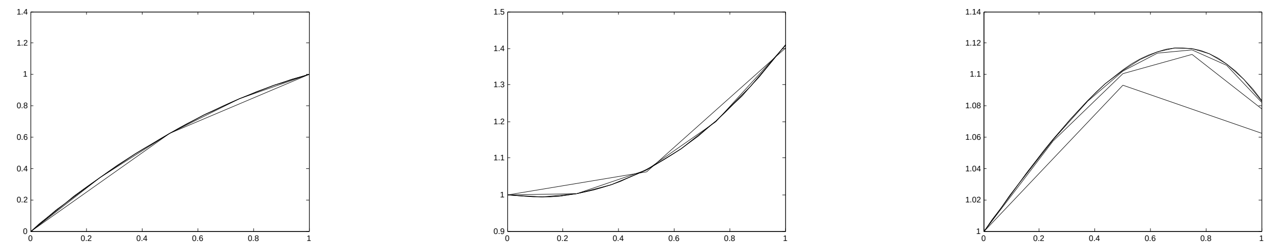

Abbildung 1: Die drei Bilder zeigen jeweils die unterschiedlich feinen numerischen Lösungen der drei Parameter-Szenarien.

d) Das Problem liegt darin, dass die Aufgabe nicht mehr wohlgestellt ist. Numerisch führt dies zu einer singulären Steifigkeitsmatrix, sodass das Gleichungssystem $M\backslash$rhs nicht mehr lösbar ist.