Prof. Dr. Stefan Funken
Dipl.-Math. Katharina Becker-Steinberger
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

WS 2013/2014
Lösungsblatt 14
14.02.2014

Angewandte Numerik 2

Aufgabe 31 *(2-D Finite Elemente: Programmieraufgabe, Elementsteifigkeitsmatrix, Poisson-Problem)* (3+3+6+6 Punkte)

a) Gegeben sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, die Bilinearform

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x,y)^T \nabla v(x,y)\, d(x,y)$$

sowie die Ansatzfunktionen $\{p_i\}_{i=1}^n$. Zeigen Sie mit der Substitutionsformel für affine Transformationen, dass gilt

$$\begin{aligned} a_{T^{(i)}}(p_{i_\alpha}, p_{i_\beta}) &= \det B_i \int_{\hat{T}} \left(B_i^{-T} \nabla_{(\zeta,\xi)} \varphi_\beta(\zeta,\xi)\right)^T \left(B_i^{-T} \nabla_{(\zeta,\xi)} \varphi_\alpha(\zeta,\xi)\right) d(\zeta,\xi) \\ &= \det B_i \int_{\hat{T}} \nabla_{(\zeta,\xi)} \varphi_\beta(\zeta,\xi)^T B_i^{-1} B_i^{-T} \nabla_{(\zeta,\xi)} \varphi_\alpha(\zeta,\xi)\, d(\zeta,\xi) \\ &= \det B_i \int_{\hat{T}} \nabla_{(\zeta,\xi)} \varphi_\beta(\zeta,\xi)^T \left(B_i^T B_i\right)^{-1} \nabla_{(\zeta,\xi)} \varphi_\alpha(\zeta,\xi)\, d(\zeta,\xi) \end{aligned}$$

Satz 1 (Substitutionsformel für affine Transformationen). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ messbar und die affine Transformation $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ definiert durch*

$$F(x) = Bx + b$$

wobei $B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ eine invertierbare quadratische Matrix und $b \in \mathbb{R}^d$ sei. Dann gilt für jede integrierbare Funktion $f : \mathcal{T}(\Omega) \to [-\infty, \infty]$

$$\int_\Omega f(Bx+b)\, dx = \frac{1}{|\det(B)|} \int_{F(\Omega)} f(y)\, dy.$$

Hinweis zur Notation: Hierbei sei $F_{T^{(i)}}(\zeta,\xi) := B_i(\zeta,\xi)^T + b = (x,y)^T$ die affine Transformation vom Referenzgebiet $\hat{T} = \operatorname{conv}((0,0),(1,0),(0,1))$ auf das jeweilige Element $T^{(i)}$. i ist also der Index des Dreiecks, das gerade transformiert werden soll. α und β sind die Indizes der lokalen Ansatzfunktionen, (also z.B. $\alpha, \beta \in \{1,2,3\}$ für lineare Ansatzfunktionen). (ζ,ξ) bezeichnet die Koordinaten im Referenzgebiet $\hat{T}$, dies entspricht also (x,y) auf dem Element $T^{(i)}$. $\varphi_{\alpha,\beta}$ bezeichnet die Ansatzfunktionen im Referenzgebiet $\hat{T}$, $p_{i_{\alpha,\beta}}$ seien die Ansatzfunktionen auf dem Element $T^{(i)}$.

b) Sei $d = 2$. Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `M=stima3(knoten)`, die für Dreickselemente $T^{(i)}$ mit Knoten $(x_1^{(i)}, y_1^{(i)})^T, (x_2^{(i)}, y_2^{(i)})^T$ und $(x_3^{(i)}, y_3^{(i)})^T$ für lineare Formfunktionen die Elementsteifigkeitsmatrizen berechnet. Assemblieren Sie möglichst geschickt die Elementsteifigkeitsmatrizen zu einer globalen Matrix. Auf der Vorlesungshomepage steht ein Programmrumpf zur Verfügung.

Hinweis: Verwenden Sie hierbei die Formel aus Aufgabenteil a), auch wenn Sie diese nicht gezeigt haben.

siehe Rückseite

c) Gegeben sei das Poisson-Problem auf $[0,1]^2$:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1 \quad \text{auf } \Omega = [0,1]^2, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

Gegeben Sei außerdem die folgende Triangulierung

Koordinaten

globale Knotennr.	x	y
1	0.0	0.0
2	1.0	0.0
3	0.5	0.5
4	0.0	1.0
5	1.0	1.0

Elemente

Elementnr.			
1	1	2	3
2	2	5	3
3	3	5	4
4	1	3	4

Stellen Sie die Steifigkeitsmatrix auf und berechnen Sie die lineare FEM-Approximation.

Hinweis: Stellen Sie zunächst die Transformation aus Aufgabenteil a) auf und berechnen Sie dann die notwendigen Einträge der Elementsteifigkeitsmatrizen mit der Formel aus a) und aus diesen die Steifigkeitsmatrix. Beachten Sie hierbei, dass Sie durch die Randbedingungen nur einen Freiheitsgrad in u haben. Die linearen Formfunktionen auf dem Referenzgebiet $\hat{T}$ lauten:

$$\varphi_1(\zeta,\xi) = 1 - \zeta - \xi, \quad \varphi_2(\zeta,\xi) = \zeta, \quad \varphi_3(\zeta,\xi) = \xi$$

d) Prüfen Sie Ihre Implementierung aus Aufgabenteil b) an dem Beispiel aus Aufgabenteil c):

Berechnen Sie den Lastvektor f approximativ durch

$$\int_{T^{(i)}} f p_i \, dx \approx \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} f(x_s, y_s)$$

hierbei bezeichne (x_s, y_s) den Schwerpunkt des Dreiecks $T^{(i)}$.

Lösung:

a) Auf dem Dreieck $T^{(i)}$ gilt

$$\begin{aligned} a_{T^{(i)}}(p_{i_\alpha}, p_{i_\beta}) &= \int_{T^{(i)}} \nabla p_{i_\alpha}(x,y)^T \nabla p_{i_\beta}(x,y)\, d(x,y) \\ &= \int_{T^{(i)}} \nabla p_{i_\alpha}(F_{T^{(i)}}^{-1}(x,y))^T \nabla p_{i_\beta}(F_{T^{(i)}}^{-1}(x,y))\, d(x,y) \\ &= \int_{F^{-1}(T^{(i)})} \nabla_{(x,y)}(\varphi_\alpha \circ F_{T^{(i)}}^{-1})(F_{T^{(i)}}(\zeta,\xi))^T \nabla_{(x,y)}(\varphi_\beta \circ F_{T^{(i)}}^{-1})(F_{T^{(i)}}(\zeta,\xi)) |\det(F'_{T^{(i)}})|\, d(\zeta,\xi) \\ &= \det(F'_{T^{(i)}}) \int_{\hat{T}} \left((F_{T^{(i)}}^{-1'})^T \nabla_{(\zeta,\xi)} \varphi_\alpha(\zeta,\xi) \right)^T \left((F_{T^{(i)}}^{-1'})^T \nabla_{(\zeta,\xi)} \varphi_\beta(\zeta,\xi) \right) d(\zeta,\xi) \\ &= \det(F'_{T^{(i)}}) \int_{\hat{T}} \left(B_i^{-T} \nabla_{(\zeta,\xi)} \varphi_\alpha(\zeta,\xi) \right)^T \left(B_i^{-T} \nabla_{(\zeta,\xi)} \varphi_\beta(\zeta,\xi) \right) d(\zeta,\xi) \\ &= \det(F'_{T^{(i)}}) \int_{\hat{T}} \nabla_{(\zeta,\xi)} \varphi_\alpha(\zeta,\xi)^T B_i^{-1} B_i^{-T} \nabla_{(\zeta,\xi)} \varphi_\beta(\zeta,\xi)\, d(\zeta,\xi) \\ &= \det B_i \int_{\hat{T}} \nabla_{(\zeta,\xi)} \varphi_\beta(\zeta,\xi)^T \left(B_i^T B_i \right)^{-1} \nabla_{(\zeta,\xi)} \varphi_\alpha(\zeta,\xi).\, d(\zeta,\xi) \end{aligned}$$

b)

```
function M = stima3(vertices)

d = size(vertices,2);
G = [ones(1,d+1);vertices'] \ [zeros(1,d);eye(d)];
M = det([ones(1,d+1);vertices']) * G * G' / prod(1:d);
```

c) Mit den linearen Formfunktionen

$$\varphi_1(\zeta,\xi) = 1-\zeta-\xi, \quad \varphi_2(\zeta,\xi) = \zeta, \quad \varphi_3(\zeta,\xi) = \xi$$

wollen wir die Transformationen $F_{T^{(i)}}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{i_{11}} & b_{i_{12}} \\ b_{i_{21}} & b_{i_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{i_1} \\ b_{i_2} \end{pmatrix} =: F_{T^{(i)}}(\zeta,\xi)$$

vom Referenzgebiet $\hat{T}$ auf das Element $T^{(i)}$ bestimmen, d.h. die Matrizen B_i und Vektoren $b_i, i = 1,\dots,4$.

Wir haben $(\zeta,\xi)^T \in \{(0,0)^T, (1,0)^T, (0,1)^T\}$. Einsetzen der Knoten des Referenzelementes liefert allgemein für den ersten Knoten $P_1^{(i)} = (x_1^{(i)}, y_1^{(i)})^T$ des i-ten Elements

$$\begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ y_1^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{i_{11}} & b_{i_{12}} \\ b_{i_{21}} & b_{i_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{i_1} \\ b_{i_2} \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} b_{i_1} \\ b_{i_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ y_1^{(i)} \end{pmatrix},$$

für den zweiten Knoten $P_2^{(i)} = (x_2^{(i)}, y_2^{(i)})^T$

$$\begin{pmatrix} x_2^{(i)} \\ y_2^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{i_{11}} & b_{i_{12}} \\ b_{i_{21}} & b_{i_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} b_{i_{11}} \\ b_{i_{21}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^{(i)} - x_1^{(i)} \\ y_2^{(i)} - y_1^{(i)} \end{pmatrix}$$

und für den dritten Knoten $P_3^{(i)} = (x_3^{(i)}, y_3^{(i)})^T$

$$\begin{pmatrix} x_3^{(i)} \\ y_3^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{i_{11}} & b_{i_{12}} \\ b_{i_{21}} & b_{i_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} b_{i_{21}} \\ b_{i_{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3^{(i)} - x_1^{(i)} \\ y_3^{(i)} - y_1^{(i)} \end{pmatrix}.$$

Somit lautet die affine Transformation allgemein

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^{(i)} - x_1^{(i)} & x_3^{(i)} - x_1^{(i)} \\ y_2^{(i)} - y_1^{(i)} & y_3^{(i)} - y_1^{(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ y_1^{(i)} \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich für das erste Element

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_1^{-1}B_1^{-T} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Für das zweite Element folgt

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2^{-1}B_2^{-T} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

für das dritte Element

$$B_3 = \begin{pmatrix} -1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B_3^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B_3^{-1}B_3^{-T} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

und für das vierte Element

$$B_4 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B_4^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B_4^{-1}B_4^{-T} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Außerdem gilt

$$|\det B_1| = 1 \cdot 0.5 - 0 \cdot 0.5 = 0.5, \quad |\det B_2| = 0.5, \quad |\det B_3| = 0.5, \quad |\det B_4| = 0.5.$$

und

$$\nabla\varphi_1(\zeta,\xi) = -\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla\varphi_2(\zeta,\xi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla\varphi_3(\zeta,\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da wir am kompletten Rand homogene Dirichlet-Bedingungen haben, haben wir nur einen Freiheitsgrad am globalen Knoten P_3. Somit hat die Steifigkeitsmatrix nur einen Eintrag korrespondierend zu dem Konten P_3:

$$a(p_3, p_3) = \sum_{i=1}^{4} a_{T^{(i)}}(p_3, p_3)$$

Für die einzelnen Beiträge ergibt sich

$$\begin{aligned}
a_{T^{(1)}}(p_3, p_3) &= 0.5 \int_{\hat{T}} \nabla\varphi_3 B_1^{-1} B_1^{-T} \nabla\varphi_3 \, d(\zeta, \xi) \\
&= 0.5 \int_{\hat{T}} (0, 1) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} , d(\zeta, \xi) \\
&= 0.5 \int_{\hat{T}} (0, 1) \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} , d(\zeta, \xi) \\
&= 0.5 \int_0^1 \int_0^{1-\zeta} 4 \, d\xi \, d\zeta \\
&= 0.5 \int_0^1 4(1-\zeta) \, d\xi \\
&= 0.5 \left[-2(1-\zeta)^2 \right]_0^1 = 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{T^{(2)}}(p_3, p_3) &= 0.5 \int_{\hat{T}} \nabla\varphi_3 B_2^{-1} B_2^{-T} \nabla\varphi_3 \, d(\zeta, \xi) \\
&= 0.5 \int_{\hat{T}} (0, 1) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} , d(\zeta, \xi) \\
&= 0.5 \int_{\hat{T}} (0, 1) \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} , d(\zeta, \xi) \\
&= 0.5 \int_0^1 \int_0^{1-\zeta} 4 \, d\xi \, d\zeta \\
&= 0.5 \int_0^1 4(1-\zeta) \, d\xi \\
&= 0.5 \left[-2(1-\zeta)^2 \right]_0^1 = 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{T^{(3)}}(p_3, p_3) &= 0.5 \int_{\hat{T}} \nabla\varphi_3 B_3^{-1} B_3^{-T} \nabla\varphi_3 \, d(\zeta, \xi) \\
&= 0.5 \int_{\hat{T}} (0, 1) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} , d(\zeta, \xi) \\
&= 0.5 \int_{\hat{T}} (0, 1) \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} , d(\zeta, \xi) \\
&= 0.5 \int_0^1 \int_0^{1-\zeta} 4 \, d\xi \, d\zeta \\
&= 0.5 \int_0^1 4(1-\zeta) \, d\xi \\
&= 0.5 \left[-2(1-\zeta)^2 \right]_0^1 = 1,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_{T^{(4)}}(p_3,p_3) &= 0.5\int_{\hat{T}} \nabla\varphi_2 B_4^{-1}B_4^{-T}\nabla\varphi_2\, d(\zeta,\xi)\\
&= 0.5\int_{\hat{T}} (1,0)\begin{pmatrix} 4 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, d(\zeta,\xi)\\
&= 0.5\int_{\hat{T}} (1,0)\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}, d(\zeta,\xi)\\
&= 0.5\int_0^1\int_0^{1-\zeta} 4\, d\xi\, d\zeta\\
&= 0.5\int_0^1 4(1-\zeta)\, d\xi\\
&= 0.5\left[-2(1-\zeta)^2\right]_0^1 = 1,
\end{aligned}
$$

Somit $a(p_3,p_3) = \sum_{i=1}^4 a_{T^{(i)}}(p_3,p_3) = 4$. Für die rechte Seite gilt mit $f = 1$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^4 \int_\Omega f p_i\, d(x,y) = \sum_{i=1}^4 \int_{T^{(i)}} p_i\, d(x,y) &= 3\left(0.5\int_0^1\int_0^{1-\zeta}\varphi_3\, d\xi\, d\zeta\right) + \int_0^1\int_0^{1-\zeta}\varphi_2\, d\xi\, d\zeta\\
&= 0.5\left[-\frac{1}{6}(1-\zeta)^3\right]_0^1 \cdot 3 + 0.5\int_0^1 \zeta(1-\zeta)\, d\zeta\\
&= \frac{1}{12}\cdot 3 + 0.5(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) = \frac{1}{4}+\frac{1}{12} = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Das Gleichungssystem lautet somit

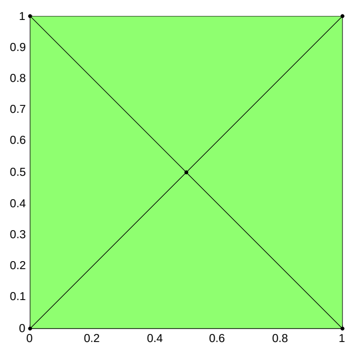
$$
4u_3 = \frac{1}{3}
$$

d.h., $u_3 = 1/12$.

d)

```
% 2_D-FEM for Laplace-operator
clear all;
close all;


% Initialisation
addpath Square
load coordinates.dat; coordinates=coordinates(:,2:end);
load elements.dat; elements=elements(:,2:end);
load dirichlet.dat; dirichlet=dirichlet(:,2:end);


% display the grid
figure(1)
trisurf(elements,coordinates(:,1), coordinates(:,2), 0*coordinates(:,2),...
         'facecolor','interp', 'Marker','.');
grid off; axis equal; view(2)


BdryNodes = unique(dirichlet);
FreeNodes=setdiff(1:size(coordinates,1),BdryNodes);
A = sparse(size(coordinates,1),size(coordinates,1));
```

```
b = sparse(size(coordinates,1),1);

% Assembly
for j = 1:size(elements,1)
  A(elements(j,:),elements(j,:)) = A(elements(j,:),elements(j,:)) ...
      + stima3(coordinates(elements(j,:),:));
end

% Volume Forces
for j = 1:size(elements,1)
     b(elements(j,:)) = b(elements(j,:)) + ...
       det([1,1,1; coordinates(elements(j,:),:)']) * ...
       f(sum(coordinates(elements(j,:),:))/3)/6;
end

% Dirichlet conditions
u = sparse(size(coordinates,1),1);
u(unique(dirichlet)) = u_d(coordinates(unique(dirichlet),:));

b = b - A * u;

% Computation of the solution
u(FreeNodes) = A(FreeNodes,FreeNodes) \ b(FreeNodes);


% graphic representation
figure(2);
trisurf(elements,coordinates(:,1),coordinates(:,2),u','facecolor','interp')
view(10,40);
title('Solution of the Problem')
```



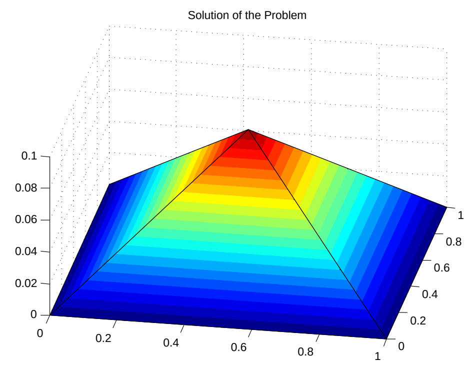


Abbildung 1: Links: Finite-Elemente Gitter, rechts: Numerische Lösung