Prof. Dr. Stefan Funken
Dipl.-Math. Katharina Becker-Steinberger
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

WS 2013/2014
Lösungsblatt 6
6.12.2013

Angewandte Numerik 2

Aufgabe 11 *(Konstruktion eines expliziten Zweischrittverfahrens, Nullstabilität)* (8 Punkte)

Zu konstruieren sei ein explizites Zweischrittverfahren der Form

$$y_{j+2} + \alpha_1 y_{j+1} + \alpha_0 y_j = h(\beta_0 f(t_j, y_j) + \beta_1 f(t_{j+1}, y_{j+1})).$$

a) Bestimmen Sie α_0, β_0 und β_1 in Abhängigkeit von α_1, so dass das Verfahren (mindestens) die Ordnung zwei hat.

Hinweis: Ein k-Schrittverfahren ist genau dann konsistent, wenn die folgenden beiden Gleichungen erfüllt sind

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{k} i \cdot \alpha_i - \sum_{i=0}^{k} \beta_i = 0. \tag{1}$$

Das Mehrschrittverfahren hat genau dann (wenigstens) die Konsistenzordnung $p \geq 2$, wenn neben (1) die folgenden Bedingungen gelten:

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i i^l = l \sum_{i=0}^{k} \beta_i i^{l-1} \quad \text{für alle } l = 2, \dots, p. \tag{2}$$

b) Für welche α_1-Werte ist das Zweischrittverfahren dann null-stabil?

c) Lässt sich α_1 so wählen, dass sich ein null-stabilies Verfahren dritter Ordnung ergibt?

Lösung:

a) Allgemein haben lineare 2-Schrittverfahren die Form

$$\sum_{i=0}^{2} \alpha_i y_{j+i} = h \sum_{i=0}^{2} \beta_i f_{j+i}$$

Um Konsistenzordnung $p \geq 2$ zu zeigen, bestimme $\alpha_0, \beta_0, \beta_1$, so dass folgendes gilt

$$\sum_{i=0}^{2} \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{2} i\alpha_i - \sum_{i=0}^{2} \beta_i = 0, \quad \text{(Konsistenz)}$$
$$\sum_{k=0}^{2} \alpha_i i^l = l \sum_{k=0}^{2} \beta_i i^{l-1} \quad \text{für } l = 2 \quad \text{(Konsistenzordnung } p \geq 2\text{)}.$$

1. Konsistenz:

i)

$$\sum_{i=0}^{2} \alpha_k \stackrel{!}{=} 0 \iff 1 + \alpha_1 + \alpha_0 \stackrel{!}{=} 0$$
$$\iff \alpha_0 = -\alpha_1 - 1$$

ii)

$$\sum_{i=0}^{2} i\alpha_i - \sum_{i=0}^{2} \beta_i \stackrel{!}{=} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \cdot \alpha_1 + 2 \cdot 1 = \alpha_1 + 2 \stackrel{!}{=} \beta_0 + \beta_1$$

2. Konsistenzordnung $p \geq 2$: Sei $l = 2$:

$$\sum_{i=0}^{2} \alpha_i i^2 = \alpha_1 1^2 + 1 \cdot 2^2 = \alpha_1 + 4 \stackrel{!}{=} 2\sum_{i=0}^{s} \beta_i i = 2\beta_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \beta_1 = \frac{1}{2}\alpha_1 + 2$$

mit ii) ergibt sich für β_0

$$\alpha_1 + 2 \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}\alpha_1 + 2 + \beta_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \beta_0 = \frac{1}{2}\alpha_1$$

b) Das charakteristische Polynom zu den in a) bestimmten Parametern lautet

$$\rho(z) = \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0 = z^2 + \alpha_1 z - \alpha_1 - 1$$

Bestimmen der Nullstellen in Abhängigkeit von α_1 liefert

$$\begin{aligned} \rho(z) = z^2 + \alpha_1 z - \alpha_1 - 1 = 0 \\ \Longleftrightarrow \qquad \left(z + \frac{\alpha_1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{4}\left(\alpha_1 + 2\right)^2 \\ z_{1/2} &= \pm\frac{1}{2}(\alpha_1 + 2) - \frac{\alpha_1}{2} \end{aligned}$$

Damit gilt

$$z_1 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + 2) - \frac{\alpha_1}{2} = \frac{1}{2}(\alpha_1 + 2 - \alpha_1) = 1$$

und da $z_1 = 1$ einfach seien muss, folgt für

$$z_2 = \frac{1}{2}(-\alpha_1 - 2 - \alpha_1) = -(\alpha_1 + 1),$$

dass $-2 < \alpha_1 \leq 0$ gelten muss.

c) Damit das Verfahren 3.Ordnung hat muss zusätzlich zu den Bedingungen aus a)

$$\sum_{i=0}^{2} \alpha_i l^3 = 3\sum_{i=0}^{2} \beta_i i^2$$

gelten:

$$\sum_{i=0}^{2} \alpha_i l^3 = \alpha_1 1^3 + 1 \cdot 2^3 = \alpha_1 + 8$$
$$3\sum_{i=0}^{2} \beta_i i^2 = 3\beta_1$$

somit $\beta_1 = \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{8}{3}$. Es sind also alle vier Parameter eindeutig bestimmt:

$$\frac{1}{2}\alpha_1 + 2 = \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{8}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_1 = 4$$

und damit $\beta_1 = 4, \beta_0 = 2, \alpha_0 = -5$. Wir erhalten das Zweischrittverfahren

$$y_{j+2} + 4y_{j+1} - 5y_j = h\left(2f(t_j, y_j) + 4f(t_{j+1}, y_{j+1})\right).$$

Für die Nullstellen des zugehörgen charakteristischen Polynoms gilt

$$\begin{aligned} & \rho(z) = z^2 + 4z - 5 = 0 \\ \iff & \qquad (z+2)^2 = 9 \\ & \qquad\quad z_{1/2} = \pm 3 - 2, \end{aligned}$$

d.h. $z_1 = 1$ und $z_2 = -5$ das Verfahren ist somit nicht nullstabil.

Aufgabe 12 *(Mehrschrittverfahren, Konsistenzordnung, Konvergenz)* (8 Punkte)

Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des Mehrschrittverfahrens

$$y_{j+4} - y_j = \frac{h}{3}(8f_{j+1} - 4f_{j+2} + 8f_{j+3}).$$

Lösung:

1. Prüfe *Konsistenz*: Zeige hierzu

$$\sum_{i=0}^{4} \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{4} i\alpha_i - \sum_{i=0}^{4} \beta_i = 0.$$

Es gilt

$$\sum_{i=0}^{4} \alpha_i = 1 - 1 = 0,$$
$$\sum_{i=0}^{4} i\alpha_i = 4 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = 4$$
$$\sum_{i=0}^{4} \beta_i = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = \frac{12}{3} = 4.$$

Das Verfahren ist somit konsistent.

2. Prüfe *Konsistenzordnung*: Bestimme hierzu größtes p mit

$$\sum_{i=0}^{4} \alpha_i i^l = l \sum_{i=0}^{4} \beta_i i^{l-1}, \quad \forall l = 2, \ldots, p.$$

Für $l = 2$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{4} \alpha_i i^2 = 1 \cdot 4^2 = 16$$
$$2\sum_{i=0}^{4} \beta_i i = 2\left(\frac{8}{3} \cdot 1 - \frac{4}{3} \cdot 2 + \frac{8}{3} \cdot 3\right) = 16$$

Für $l = 3$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{4} \alpha_i i^3 = 1 \cdot 4^3 = 64$$
$$3\sum_{i=0}^{4} \beta_i i^2 = 3\left(\frac{8}{3} \cdot 1 - \frac{4}{3} \cdot 2^2 + \frac{8}{3} \cdot 3^2\right) = 3\left(\frac{8}{3} - \frac{16}{3} + \frac{72}{3}\right) = 64$$

Für $l = 4$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{4} \alpha_i i^4 = 1 \cdot 4^4 = 256$$

$$4 \sum_{i=0}^{4} \beta_i i^3 = 4\left(\frac{8}{3} \cdot 1 - \frac{4}{3} \cdot 2^3 + \frac{8}{3} \cdot 3^3\right) = 3\left(\frac{8}{3} - \frac{32}{3} + \frac{216}{3}\right) = 4\frac{192}{3} = 256$$

Für $l = 5$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{4} \alpha_i i^5 = 1 \cdot 4^5 = 1024$$

$$5 \sum_{i=0}^{4} \beta_i i^5 = 4\left(\frac{8}{3} \cdot 1 - \frac{4}{3} \cdot 2^4 + \frac{8}{3} \cdot 3^4\right) = 986,666$$

Das Verfahren hat die Konsistenzordnung $p = 4$.

Aufgabe 13 *(Programmieraufgabe, Nichtstabiles Verhaltens vom Mehrschrittverfahren)* (8 Punkte)

Betrachten Sie das in Aufgabe 11 konstruierte Zweischrittverfahren der Ordnung 3:

$$y_{j+1} + 4y_j - 5y_{j-1} = h(4f_j + 2f_{j-1})$$

Verwenden Sie dieses Verfahren, um das Anfangswertproblem

$$y' = y, \quad y(0) = 1$$

zu lösen. Verwenden Sie die exakten Anfangsdaten $y_0 = 1, y_1 = e^h$. Plotten Sie die numerischen Ergebnisse für $h = 1/10, h = 1/20, h = 1/50, h = 100$ jeweils gegen die exakte Lösung auf dem Intervall $[t_0, t_b] = [0, 1]$. Setzen Sie die Darstellung der Axen mit `xlim ([0,1])` und `ylim ([0,5])` fest.

```
function y = zweischritt(t_0, t_b, N, y_0, y_1,f, y_exakt)
h = 1/N
t = t_0;
y(:,1) = y_0(:)
y(:,2) = exp(h)
for k=2:N
y(:,k+1)=-4*y(:,k)+5*y(:,k-1)+h*(4*feval(f,y(:,k))+2* feval(f,y(:,k-1)));
end
end
```

```
function dy = f13(y)
dy = y
```

```
% Aufgabe 13: Nichtstabilit‰t eines Zweischrittverfahrens

clear all
close all

fprintf('\n*******************************************************\n');
fprintf('\nAufgabe 13: Nichtstabilit‰t eines Zweischrittverfahrens\n');
fprintf('\n*******************************************************\n');

N = [10, 20, 50, 100];
y_0 = 1;
```

```
t_0 = 0;
t_b = 1;
y_exakt = @(y) exp(y);

for i=1:size(N,2)
h(i) =1/N(i);
y_1= exp(h(i));
y = zweischritt(t_0, t_b, N(i), y_0, y_1,@f13);

% Grafische Ausgabe
g= figure(i);
x = linspace(t_0,t_b, N(i)+1);
plot(x, y,'x-')
title('Instabiles Zweischrittverfahren','FontSize', 14)
xlabel('t', 'FontSize', 14)
ylabel('y', 'FontSize', 14)
xlim ([0,1]);
ylim ([0,5]);
hold on;
plot(x,exp(x),'r')
legend ('Numerische Loesung', 'Exakte Loesung', 'Location', 'Northwest')
end
```

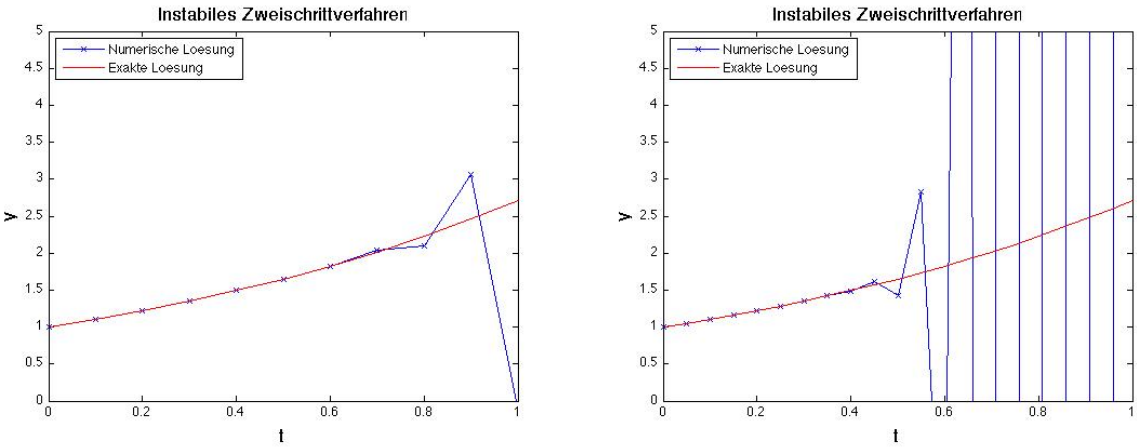

Abbildung 1: links: Schrittweite $h = 1/10$, rechts: Schrittweite $h = 1/20$.

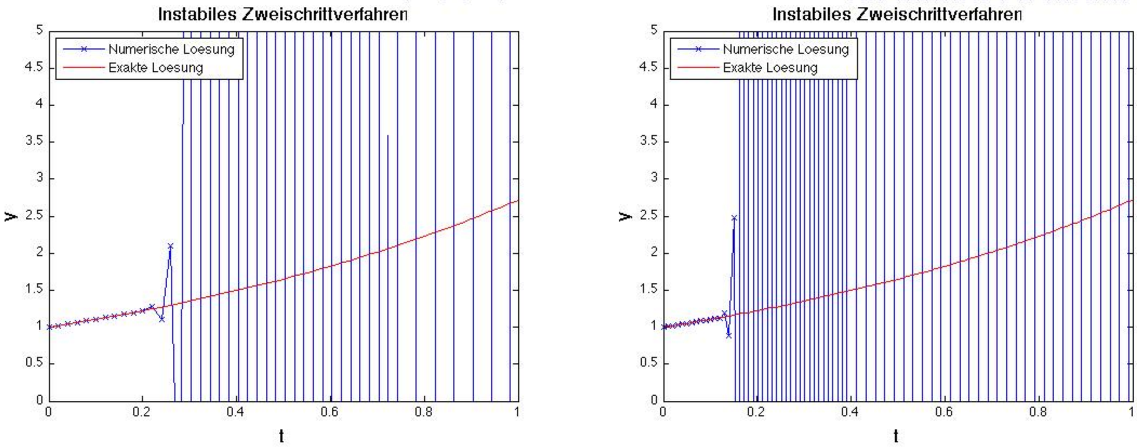

Abbildung 2: links: Schrittweite $h = 1/50$, rechts: Schrittweite $h = 1/100$.