

**Übungen 2 zur Modellierung und Simulation III / Dynamische Systeme und
Modellreduktion (WS 2013/14)**

[http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/wintersemester-20132014/
vorlesung-modellierung-und-simulation-3.html](http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/wintersemester-20132014/vorlesung-modellierung-und-simulation-3.html)

[http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/wintersemester-20132014/
vorlesung-dynamische-systeme-und-modellreduktion.html](http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/wintersemester-20132014/vorlesung-dynamische-systeme-und-modellreduktion.html)

Wiederholung: Dynamisches System, Separation der Variablen, Lineare Stabilitätsanalyse, Picard-Lindelöf, Potentialsysteme, Bifurkationen

Aufgabe 2.1 (Verdünnung einer Lösung)

Ein Zylinder enthalte 2 kg Wasser, und es seien 50 g Saccharose darin gelöst. Durch eine Röhre fließt 10 g Wasser pro Minute in den Zylinder, während durch eine andere Röhre 10 g Wasser pro Minute – einschließlich eines bestimmten Saccharoseanteils – abfließt. Wie vermindert sich die Masse der Saccharose als Funktion der Zeit?

Aufgabe 2.2 (Analytische Lösung von gew. Differentialgleichungen)

Berechnen Sie die analytische Lösung $c(t)$, $v_1(t)$ und $v_2(t)$ der folgenden Differentialgleichungen für beliebigen Anfangswert.

(i) $\dot{c} = c^2$

(ii) $\dot{v}_1 = \frac{v_1}{t}$

(iii) $\dot{v}_2 = -\frac{v_2}{t}$

Aufgabe 2.3 (Graphische Analyse)

Analysieren Sie die folgenden Differentialgleichungen graphisch: Finden Sie alle Fixpunkte, klassifizieren Sie deren Stabilität und skizzieren Sie den Graph der Lösungen für verschiedene Anfangswerte.

(i) $\dot{x} = 4x^2 - 16$

(ii) $\dot{y} = y - y^2$

(iii) $\dot{z} = 1 + \frac{1}{2} \cos(z)$

Aufgabe 2.4 (Tumor-Wachstum)

Das Wachstum eines Tumors kann mit dem Gompertz-Gesetz

$$\dot{N} = -aN \ln(bN)$$

besser modelliert werden als mit dem logistischen Wachstumsgesetz nach Verhulst

$$\dot{N} = a(N_{\max} - N)N.$$

Dabei ist $N > 0$ proportional zur Anzahl der Tumorzellen; a , b und N_{\max} sind positive Parameter.

1. Skizzieren und vergleichen Sie die Graphen von N für beide Wachstumsgesetze.
2. Interpretieren Sie a , b und N_{\max} biologisch.
3. Klassifizieren Sie die Fixpunkte der beiden Modelle mit Hilfe der linearen Stabilitätsanalyse.