

**Übungen 3 zur Modellierung und Simulation III / Dynamische Systeme und  
Modellreduktion (WS 2013/14)**

[http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/wintersemester-20132014/  
vorlesung-modellierung-und-simulation-3.html](http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/wintersemester-20132014/vorlesung-modellierung-und-simulation-3.html)

[http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/wintersemester-20132014/  
vorlesung-dynamische-systeme-und-modellreduktion.html](http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/wintersemester-20132014/vorlesung-dynamische-systeme-und-modellreduktion.html)

---

**Wiederholung:** 2-D-Systeme, Stabilität

**Aufgabe 3.1** (Potentiale)

Untersuche die Dynamik folgender Systeme mit dem Potentialansatz:

a)  $\dot{x} = x(1 - x)$

b)  $\dot{x} = -\sinh(x)$

c)  $\dot{x} = -x^3 + x$

**Aufgabe 3.2** (Numerisches Lösen einer gewöhnlichen DGL)

Eine einfache Methode zum Lösen eines Anfangswertproblems (AWP)

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

ist das **explizite Trapezverfahren**

$$x_{i+1} = x_i + \frac{\Delta t_i}{2} (f(x_i) + f(x_i + \Delta t_i f(x_i))), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

a) Implementiere dieses Verfahren und wende es auf das AWP aus Aufg. 1.2, definiert auf dem Zeitintervall  $[0, t_{\text{end}} = 300]$  mit  $g = 9.81 \text{ m s}^{-1}$ ,  $k = 0.73 \text{ kg m}^{-1}$ ,  $m = 120 \text{ kg}$  für eine äquidistante Schrittweite, z. B.  $\Delta t_i = \Delta t = 1$ , an.

b) Gib den Fehler bzgl. der exakten Lösung

$$v(t) = \frac{\tanh(t\sqrt{(kg)/m} + 1)\sqrt{g}}{\sqrt{k/m}}$$

aus.

c) Zeige, dass das Verfahren die globale Fehlerordnung 2 besitzt, d.h. nach  $N$  Zeitschritten gilt

$$|x(t_N) - x_N| \in \mathcal{O}(\Delta t^2).$$

Tipp: Taylorentwicklung.

**Aufgabe 3.3** (Zusatz: Simple Schrittweitensteuerung)

Eine äquidistante Schrittweite mag nicht immer die beste Wahl sein. Eine einfache **Schrittweitensteuerung** geht wie folgt: Sei  $\hat{x}_i$  die diskrete Lösung des Trapezverfahrens (2. Ordnung) im  $i$ -ten Schritt und  $x_i$  die diskr. Lösung des im Trapezverfahren verwendeten expliziten Eulers (1. Ordnung). Dann errechnet sich der neue Zeitschritt durch

$$\Delta t_{i+1} = \Delta t_i \cdot \left( \frac{tol}{|\hat{x}_i - x_i|} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1)$$

Implementiere (1) für das explizite Trapezverfahren und untersuche die Effizienz gegenüber einer äquidistanten Diskretisierung für verschiedene Startzeitschritte und Toleranzen  $tol$ .

---