Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik

Prof. Dr. Dirk Lebiedz
Jonas Unger

Übungen 4 zur Modellierung und Simulation III / Dynamische Systeme und Modellreduktion (WS 2013/14)

http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/wintersemester-20132014/vorlesung-modellierung-und-simulation-3.html
http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/wintersemester-20132014/vorlesung-dynamische-systeme-und-modellreduktion.html

---

Wiederholung: Alles bis Hamilton'sche Systeme

Aufgabe 4.1 (Sattel-Knoten-Bifurkation)
Untersuchen Sie die folgenden Differentialgleichungen für verschiedene r:

(i) $\dot{y} = r - y(1-y)$

(ii) $\dot{x} = 1 + rx + x^2$

(iii) $\dot{z} = r + z - \ln(1+z)$

(iv) $\dot{w} = r^2 + w^2$.

Zeigen Sie, dass eine Sattel-Knoten-Bifurkation bei einem bestimmten Wert von r auftritt, und zeichnen Sie ein Bifurkationsdiagramm.

Aufgabe 4.2 (Transkritische Bifurkation)
Untersuchen Sie die folgenden Differentialgleichungen wie in Aufgabe 4.1 mit dem Unterschied, dass hier eine transkritische Bifurkation auftritt:

(i) $\dot{x} = rx + x^2$

(ii) $\dot{y} = y - ry(1-y)$.

Aufgabe 4.3 (Chemische Kinetik)
Wir betrachten ein chemisches Reaktionssystem ähnlich dem in Aufgabe 1.1:

$$\mathrm{A} + \mathrm{X} \overset{k_{\pm 1}}{\rightleftharpoons} 2\,\mathrm{X}$$
$$\mathrm{X} + \mathrm{B} \overset{k_2}{\to} C.$$

Wir nehmen an, dass A und B in so großer Konzentration vorliegen, dass diese als konstant angesehen werden können.

A) Leiten Sie mit dem Massenwirkungsgesetz eine Differentialgleichung der Form $\dot{x} = c_1 x + c_2 x^2$ für die Konzentration x von X her.

B) Zeigen Sie, dass $x^* = 0$ für $k_2 b > k_1 a$ stabil ist (wobei a und b jeweils die Konzentrationen von A und B sind), und erklären Sie, warum dieser Sachverhalt chemisch sinnvoll ist.

C) Lösen Sie die Differentialgleichung für verschiedene Anfangskonzentrationen und Ratenkoeffizienten mit Ihrem Integrator, insbesondere im Bereich $k_2 b \approx k_1 a$.

b.w.

Aufgabe 4.4 (Laserschwelle)
Ein Modell für einen Laser ist durch das folgende System gewöhnlicher Differentialgleichungen gegeben (nach Milonni und Eberly)

$$
\begin{aligned}
\dot{n} &= GnN - kn \\
\dot{N} &= -GnN - fN + p.
\end{aligned}
$$

Hier ist n die Zahl der Photonen im Laser-Feld, N ist die Anzahl der angeregten Photonen. Parameter $G > 0$ modelliert die Zunahme für die stimulierte Emission, k die Abnahme. Weiter beschreibt f die Abnahme durch spontane Emission, p ist die Stärke der optischen Pumpe.

A) Wir nehmen an, dass die Änderung von N viel schneller relaxiert als die Änderung von n. Mit der *Quasi Steady-State Approximation* (QSSA) nehmen wir an, dass $\dot{N} \approx 0$. Leiten sie damit eine eindimensionale Differentialgleichung für n her.

B) Zeigen Sie, dass $n^* = 0$ instabil wird für $p > p_c$ mit der Laserschwelle p_c.

C) Welchen Typ hat die Bifurkation bei p_c?
