Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik

Prof. Dr. Dirk Lebiedz
Jonas Unger

Übungen 5 zur Modellierung und Simulation III / Dynamische Systeme und Modellreduktion (WS 2013/14)

`http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/wintersemester-20132014/vorlesung-modellierung-und-simulation-3.html`
`http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/wintersemester-20132014/vorlesung-dynamische-systeme-und-modellreduktion.html`

Wiederholung: Hamiltonsche Systeme, Hamiltonsche DGLen, Hamiltonsches Prinzip, Liouville

Aufgabe 5.1 (Pitchfork-Bifurkation)
Analysieren Sie die folgenden Differentialgleichung, und zeigen Sie, dass eine Pitchfork-Bifurkation auftreten kann. Ist diese super- oder subkritisch?

(i) $\dot{x} = x + rx^3$

(ii) $\dot{y} = y - ry^3$

(iii) $\dot{z} = z + \frac{rz}{1+z^2}$.

Aufgabe 5.2 (Insektenplage)
Der *spruce budworm* (Fichten-Knospenbohrer?) ist ein Schädling in Ost-Kanada, der dort ganze Wälder zerstört. Die Dynamik des Waldes kann als konstant angesehen werden. Die Dynamik der Wurmpopulation kann durch

$$\dot{N} = RN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - p(N)$$

beschrieben werden. Die Wurmpopulation wächst logistisch, wenn keine Räuber vorhanden sind. Der Parameter K wird bestimmt durch die Menge an Laub in den Bäumen und ändert sich mit den Jahreszeiten.
Der Term $p(N)$ beschreibt den Tod durch „gefressen werden“: Ab einer bestimmten Populationsgröße beginnen die Vögel, die Würmer zu fressen, so schnell sie können. Dieses Verhalten wird durch

$$p(N) = \frac{BN^2}{A^2 + N^2}$$

mit $A, B > 0$ modelliert.

A) Entdimensionalisieren Sie die Diffentialgleichung, indem Sie sie durch B teilen und in die Variable $x := \frac{N}{A}$ transformieren. Benutzen Sie auch die dimensionslose Zeit $\tau := \frac{Bt}{A}$ und Paramter $r := \frac{RA}{B}$, $k := \frac{K}{A}$.

B) Bestimmen Sie die Fixpunkte der dimensionslosen Differentialgleichung.

C) Bestimmen Sie die Stabilität der Fixpunkte (evtl. graphisch) in Abhängigkeit von k und r.

D) Berechnen Sie Bifurkationskurven: Kurven in der (k, r)-Ebene in Abhängigkeit von x, an deren Punkte eine Bifurkation auftritt.

Aufgabe 5.3 (Phasenportrait)
Mit dem Befehl `quiver` können Sie Phasenportraits in `MATLAB` schnell und einfach erstellen. Schreiben Sie sich eine Funktion, mit deren Hilfe Sie die Phasenportraits folgender Systeme ansehen können:

(i) $\dot{x} = x - y, \quad \dot{y} = 1 - e^x$

(ii) $\dot{x} = x - x^3, \quad \dot{y} = -|y|$

(iii) $\dot{x} = y\sin(x), \quad \dot{y} = x^2 - y$.
