Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik

Prof. Dr. Dirk Lebiedz
Jonas Unger

Übungen 6 zur Modellierung und Simulation III / Dynamische Systeme und Modellreduktion (WS 2013/14)

`http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/wintersemester-20132014/vorlesung-modellierung-und-simulation-3.html`
`http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/wintersemester-20132014/vorlesung-dynamische-systeme-und-modellreduktion.html`

Aufgabe 6.1 (Analytische Fixpunktanalyse)
Ermitteln Sie analytisch den Fixpunkt des *Van-der-Pol Oszillators* (überführt in ein System erster DGL)

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2\\ \dot{y}_2 &= \mu(1-y_1^2)y_2 - y_1\end{aligned}$$

und charakterisiere ihn in Abhängigkeit des Parameters $\mu \in \mathbb{R}$. Verifizieren Sie die Aussage mittels eines numerischen Phasenportraits.

Aufgabe 6.2 (SIR-Modell nach Kermack und McKendrick, 1927)
Im SIR-Modell für eine Epidemie werden drei Bevölkerungsgruppen unterschieden: $S > 0$ die Gesunden, die sich anstecken können (susceptible), $I > 0$ die Infizierten (infected) und $R > 0$ die Personen, welche die Krankheit (lebend) überwunden haben (recovered), d. h. andere nicht mehr anstecken und sich selbst auch nicht mehr anstecken können.

(A) Modellierung: Stellen Sie ein Dgl.-Modell in den Variablen S, I und R auf, das die Änderung der Variablen über die Zeit beschreibt. Gehen Sie davon aus, dass sich die Krankheit ausbreitet, indem sich Gesunde und Infizierte begegnen, wobei ein Treffen mit der Infektiosität $\beta > 0$ zur Ansteckung führt. Infizierte Personen erholen sich mit der konstanten Pro-Kopf-Erholungsrate $r > 0$. In Analogie zur chemischen Reaktionskinetik kann dieser Sachverhalt als

$$S \xrightarrow{\beta} I \xrightarrow{r} R$$

geschrieben werden. (Tip: Die Dgl. für I lautet $\dot{I} = \beta SI - rI$.)

(B) Im Modell wird eine abgeschlossene Gruppe von Personen betrachtet, und es treten keine demographischen Einflüsse wie Geburt oder anderweitiger Tod auf. Daher ist die Gesamtzahl der Personen $N := S + I + R$ konstant. Zeigen Sie dies für das Modell. (Damit kann die Dgl. für R entfallen, weil Sie den Wert von R zu jeder Zeit t aus den anderen Werten berechnen können.)

(C) Berechnen und klassifizieren Sie alle Gleichgewichte des Systems analytisch.

(D) Skizzieren Sie das Vektorfeld und die Nullklinen des Modells.

(E) Angenommen, eine infizierte Person trifft auf eine Gruppe von 499 gesunden Menschen, die sich nicht impfen lassen und sich auch sonst nicht gegen die Krankheit schützen. Wird es eine Epidemie geben? Lösen Sie das Dgl.-Modell für verschiedene Parameter, z. B. $\beta = 0.001$ und $r = 0.1$ und Populationsgrößen mit den gegebenen `MATLAB`-Funktionen. Plotten Sie das Vektorfeld mit `quiver` und zeichnen Sie Lösungstrajektorien in dieselbe Graphik.

(F) In der Epidemieforschung spielt die Reproduktionsrate R_0 eine wichtige Rolle: die durchschnittliche Zahl neuer Infizierter, die ein einzelner Infizierter in einer komplett anfälligen, gesunden Population erzeugt. Ist $R_0 > 1$, so bricht eine Epidemie aus. Ist $R_0 < 1$, so wird die Krankheit nicht signifikant weiter übertragen. Der Fall einer gesunden Population wird durch $S = N$, $R = 0$ beschrieben. Eine Person ist infiziert. Eine Epidemie tritt im SIR-Modell per Definition genau dann auf, wenn $\dot{I} > 0$. Stellen Sie eine Formel für R_0 mit dem kritischen Wert von $\dot{I}$ auf. Überprüfen Sie die Formel mit numerischen Tests: Simulationen des Modells für verschiedene Werte. (Tip: $R_0 = \frac{\beta N}{r}$)

(G) Impfung schützt Individuen vor der Ansteckung! Aber auch eine genügend hohe Impfrate kann die Bevölkerung vor einer Epidemie schützen. Begründen Sie dies mit der Formel für R_0.

(H) Nehmen Sie den Einfluss von Impfung in das Modell auf. Gehen Sie dabei davon aus, dass die Impfung vor Ausbruch der Krankheit durchgeführt wird, also der Anfangswert entsprechend angepasst wird. Führen Sie numerische Simulationen durch, die zeigen, dass ab einem bestimmten geimpften Anteil vN der Gesamtbevölkerung mit Impfrate v keine Epidemie mehr eintritt. Wie hängt R_0 von der Impfrate ab?

(I) Bei welchem Wert von S nimmt I sein Maximum an? Berechnen Sie diesen Wert analytisch und plotten Sie ihn in Ihr Phasendiagramm. Es kann günstig sein, die zwei-dimensionale gewöhnliche Differentialgleichung in eine ein-dimensionale zu transformieren:

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S} = \frac{\dot{I}}{\dot{S}} = \dots$$

Welche Information geht bei der Transformation verloren?

(J) Nehmen wir an, dass die Immunität der erholten Personen nicht dauerhaft anhält, so dass sie sich wieder anstecken können. Ist es möglich, dass sich eine dauerhafte Epidemie in der Bevölkerung hält?