Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik

Prof. Dr. Dirk Lebiedz
Jonas Unger

Übungen 7 zur Modellierung und Simulation III / Dynamische Systeme und Modellreduktion (WS 2013/14)

`http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/wintersemester-20132014/vorlesung-modellierung-und-simulation-3.html`
`http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/wintersemester-20132014/vorlesung-dynamische-systeme-und-modellreduktion.html`

Aufgabe 7.1 (FitzHugh–Nagumo Modell)
Die FitzHugh–Nagumo (FHN) Gleichungen sind eine einfache Reformulierung des Hodgkin–Huxley-Modells, für welches Hodgkin und Huxley den Medizin-Nobelpreis 1952 gewannen.
Das Hodgkin–Huxley-Modell simuliert die elektrische Signalübertragung des Tintenfisch-Riesenaxons. Das Riesenaxon kann als langer, dünner Kanal angesehen werden, an dessen äußerer Membran Signale entlang laufen. Die FHN-Gleichungen beschreiben dieselben Phänomene wie das Hodgkin–Huxley-Modell und sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(u) - v + I_a \\ \dot{v} &= \varepsilon\,(u - \gamma v + \delta) \\ f(u) &:= u\,(a-u)\,(u-1)\,, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei u die Spannung auf der Membran modelliert und v eine kombinierte Kraft repräsentiert, die nötig ist, um einen Ruhezustand zu erreichen. Weiter repräsentiert I_{a} eine Stromstärke, die von außen angelegt ist. Die Parameterwerte sind gegeben als $\varepsilon = 0.01$, $\gamma = 0.5$, $\delta = 0$ und $a = -1$.

(A) Nutzen Sie die `MATLAB`-Codes zu Blatt 6, um (1) numerisch zu lösen. Variieren Sie dabei die angelegten Stromstärke zwischen 0 und 1.

(B) Plotten Sie ein Phasenportrait des Modells. Zeichnen Sie die Nullklinen und die Trajektorie aus (A) ein.

(C) In der Diplomarbeit `http://www.siehr.net/publications/Siehr2007.pdf` behauptet der Autor auf S. 21, dass bei einem Wert von $I_{\mathrm{a}}^{\mathrm{H}} := 0.4763$ eine Hopf-Bifurkation auftritt. Überprüfen Sie diese Behauptung mit numerischen Experimenten.

Aufgabe 7.2 (FitzHugh–Nagumo-Modell, Fortsetzung)
Ändern Sie im Modell den Parameter δ auf $\delta = 0.5$. Und wählen Sie $I_{\mathrm{a}} = 0$. Setzen Sie die Anfangswerte auf die Werte im Gleichgewicht. Variieren Sie die angelegte Spannung $I_{\mathrm{a}} \in [0, 0.04]$ und simulieren Sie das System: In diesem Zustand heißt das System *erregbar*. Das Aktionspotential von Nervenzellen kann so simuliert werden.

Aufgabe 7.3 (FitzHugh–Nagumo-Modell: Bifurkationsanalyse)
Wir wollen den Wert von I_{a} bestimmen, bei dem eine Hopf-Bifurkation auftritt. Dafür nutzen wir das Programm MatCont. In MATLAB starten Sie MatCont mit `matcont`.

1. Geben Sie das Modell in MatCont ein. Dafür wählen Sie im Menü `Select>System>New`.
2. Jetzt geben Sie Anfangswerte für die Variablen und Parameter via `Type>Initial Point>Point` ein. Außerdem können Sie die Integrations-Optionen ändern. Klicken Sie *nicht* auf Select Cycle!
3. Wir brauchen noch ein Plot-Fenster: Wählen Sie `Window>Graphic>2Dplot`. Auf den Achsen sollten u und v aufgetragen werden. Passen Sie mit `Layout>Plotting region` die Plotgrenzen an.
4. Jetzt soll das System nahe ans Gleichgewicht integriert werden. Wählen Sie `Compute>Forward`.
5. Wenn Sie vorher `Window>Numeric` geöffnet hätten, könnten Sie die numerischen Werte verfolgen. Geben Sie also neue Anfangswerte in den "Starter" ein, und integrieren Sie das System erneut mit `Compute>Forward`.
6. Sollte obiger Schritt nicht funktionieren, geben Sie `why` in MATLAB ein.
7. Wir wollen mit einem Fortsetzungs-, Pfadverfolgungs- oder Homotopieverfahren den Fixpunkt verfolgen, wenn sich der Parameter I_{a} ändert. Dafür muss das Gleichgewicht als Startwert geladen werden. Öffnen Sie `Select>Initial Point`. Wählen Sie einen Wert aus, der nahe am Gleichgewicht liegen sollte. (Anklicken, `Select` drücken.)
8. Wählen Sie `Type>Initial Point>Equilibrium`. Das Hauptfenster zeigt an: `EP_EP(1)`, d. h. "starte am Gleichgewicht, um ein Gleichgewicht zu verfolgen". Sie bekommen zusätzlich ein Starter- und ein Continuer-Fenster.
9. Im Starter aktivieren Sie den Parameter, der variiert werden soll.
10. Im Continuer können Sie die maximale Schrittweite etwas kleiner wählen.
11. Ändern Sie das Plot-Fenster via `Layout>...`, so dass I_{a} gegen u aufgetragen wird.
12. Nutzen Sie `Compute>Forward` oder `Compute>Backward`, um die Kurve der Nullstellen der rechten Seite der Differentialgleichung für verschiedene Werte von I_{a} zu erhalten. Benutzen Sie auch den Stop- und Resume-Knopf im neu aufgegangenen Fenster. MatCont zeigt eine Hopf-Bifurkation mit dem Symbol H im Plot an.
13. Ändern Sie im Numeric-Fenster über `Window>Layout`, dass auch die Eigenwerte der Jacobi-Matrix angezeigt werden. Verfolgen Sie, dass an der Bifurkation tatsächlich die Eigenwerte die imaginäre Achse überschreiten. Bei welchem Wert von $I_{\mathrm{a}}^{\mathrm{H}}$ tritt die Bifurkation also wirklich auf?