Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik

Prof. Dr. Dirk Lebiedz
Jonas Unger

Übungen 9 zur Modellierung und Simulation III / Dynamische Systeme und Modellreduktion (WS 2013/14)

`http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/wintersemester-20132014/vorlesung-modellierung-und-simulation-3.html`

`http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/wintersemester-20132014/vorlesung-dynamische-systeme-und-modellreduktion.html`

Aufgabe 9.1 (Hopf-Bifurkation im Lorenz-System)
Zeigen Sie, dass bei

$$r = r_{\mathrm{H}} := \sigma \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1}$$

im Lorenz-System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \qquad \sigma, r, b > 0 \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned}$$

eine Hopf-Bifurkation in C^+ und C^- auftritt. Gehen Sie folgendermaßen vor:

- Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom für die Eigenwerte der Jacobi-Matrix des Lorenz-Systems in C^+ und C^- durch

  $$P(\lambda) := \lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + (r + \sigma)b\lambda + 2b\sigma(r - 1)$$

  gegeben ist.

- Zeigen Sie, dass es bei r_{H} eine Lösung dieser Gleichung der Form $\lambda = \mathrm{i}\omega$ mit $\omega \in \mathbb{R}$ gibt, falls $\sigma > b + 1$.

- Theoretisch müssten Sie noch zeigen, dass für diese Eigenwerte $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Re(\lambda(r_{\mathrm{H}})) \neq 0$ gilt.

Finden Sie auch den dritten (reellen) Eigenwert.

Aufgabe 9.2 (Numerische Integration des Lorenz-Systems)
Simulieren Sie das Lorenz-System mit verschiedenen Werten für die Parameter. Überprüfen Sie dabei numerisch folgende Aussagen aus der Vorlesung:

- Stabiler Fixpunkt in 0 für $r < 1$.
- Stabile Fixpunkte $C^\pm$ für $1 < r < 13.93$.
- Transientes Chaos für $13.93 < r < r_{\mathrm{H}} \approx 24.06$.
- Seltsamer Attraktor oder Grenzzyklus für $r_{\mathrm{H}} < r < 313$.
- Stabiler Grenzzyklus für $r > 313$.
