Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik

Prof. Dr. Dirk Lebiedz
Jonas Unger

Übungen 8 zur Modellierung und Simulation III / Dynamische Systeme und Modellreduktion (WS 2013/14)

http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/wintersemester-20132014/vorlesung-modellierung-und-simulation-3.html

http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/wintersemester-20132014/vorlesung-dynamische-systeme-und-modellreduktion.html

---

Aufgabe 8.1 (Hopf Bifurkationen: Übergänge von Gleichgewichten zu Grenzzyklen)
Betrachte das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + \mu x + xy^2 \\ \dot{y} &= x + \mu y - x^2 \end{aligned} \tag{1}$$

a) Zeige, dass eine Hopf-Bifurkation am Fixpunkt $(x^*, y^*) = (0, 0)$ mit sich änderndem μ auftritt. Für welches μ tritt diese ein?

b) Visualisiere die Hopf-Bifurkation numerisch.

c) Bestimme die Eigenschaft der Hopf-Bifurkation analytisch: Ist diese super- oder subkritisch?

   Hinweis: Schreibe (1) zuerst in der Form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega y + f(x, y) \\ \dot{y} &= \omega x + g(x, y), \end{aligned}$$

   wobei f and g nichtlineare Terme enthalten. Bestimme hierauf

$$a = \frac{1}{16}\left(f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy} + \frac{1}{\omega}\{f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}\}\right),$$

   wobei die partiellen Ableitungen an (x^*, y^*) ausgewertet werden. Dann gilt für die Hopf-Bifurkation:

   $a < 0$ superkritisch (stabiler Grenzzyklus)
   $a > 0$ subkritisch (instabiler Grenzzyklus).

Aufgabe 8.2 (Oszillierende chemische Reaktionen)
Ein einfaches dimensionsloses chemisches System stellt der **Brusselator** dar:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 - (b + 1)x + ax^2 y \\ \dot{y} &= bx - ax^2 y, \end{aligned}$$

mit $a, b > 0$ und „Konzentrationen“, $x, y \geq 0$.

a) Bestimme alle Fixpunkte und klassifiziere sie.

b) Visualisere die Hauptisoklinen und finde die *trapping*-Region des Flusses.

c) Zeige, dass eine Hopf-Bifurkation auftritt und bestimme den kritischen Wert $b = b_{\text{crit}}$.

d) Argumentiere mit dem *Satz von Poincaré-Bendixson*, ob es Grenzzyklen für $b < b_{\text{crit}}$ oder $b > b_{\text{crit}}$ gibt.

e) Was ist die ungefähre Periode des Grenzzyklus für $b \approx b_{\text{crit}}$?

f) Erstelle numerisch Phasenportraits für sich ändernde Parameter (halte beispielsweise a konstant und variiere b). Zeichne auch die Hauptisoklinen aus b) ein.
