Prof. Dr. Dirk Lebiedz
M.Sc. Pascal Heiter
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle

Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik
Wintersemester 2013/14

Numerische Lineare Algebra - Übungsblatt 3

(Abgabe: Mittwoch, 27. November 2013)

Aufgabe 9 *(LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung)* (8 Punkte)

Bestimmen Sie von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -4 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

die LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung und geben Sie sowohl die Zwischenschritte, als auch die Matrizen L, R und P an mit

$$PA = LR.$$

Aufgabe 10 *(Algebraische Struktur von Dreiecksmatrizen, LaTeX-Aufgabe)* (8 Punkte)

Sei

$$\mathcal{L}(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,:\, A \text{ ist unipotente untere Dreiecksmatrix}\}.$$

Zeigen Sie, dass $(\mathcal{L}(n), \cdot)$ bzgl. der Matrixmultiplikation eine (nicht abelsche) Gruppe bildet.

Hinweis: Analog zeigt man, dass die Menge der invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen ebenfalls eine Gruppe bzgl. der Matrixmultiplikation bildet.

Aufgabe 11 *(Kondition, Stabilität)* (3+3+3+3+4=16 Punkte)

Es sei folgendes mathematische Problem gegeben

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Berechne das Resultat } z \text{ für } x_0 = 30 \text{ aus der Formel} \\ \qquad\qquad z = f(x) = \log\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) \end{cases}$$

sowie ein Algorithmus

1.)	Berechne $a = x^2$
2.)	Berechne $a = a - 1$
3.)	Berechne $a = \sqrt{a}$
4.)	Berechne $a = x - a$
5.)	$z = \log(a)$

a) Berechnen Sie die relative Konditionszahl des Problems (für $x_0 = 30$). Ist das Problem gut konditioniert?

b) Berechnen Sie z für das exakte Datum $x_0 = 30$ und $\tilde{z}$ für das gestörte Datum $\tilde{x}_0 = 30.05$ mit Hilfe des gegebenen Algorithmus, sowie den relativen Ausgabefehler

$$\left|\frac{\tilde{z} - z}{z}\right|.$$

Verwenden Sie hierbei „exakte" Rechnungen, also rechnen Sie mit den Ergebnissen weiter, die Ihnen der Taschenrechner oder Computer liefert.

c) Berechnen Sie für das exakte Datum $x_0 = 30$ die Lösung z_1 mit obigem Algorithmus, allerdings mit nur 4 Stellen Genauigkeit, d.h. in jedem Schritt muss das Ergebnis gerundet werden. Wie groß ist der relative Fehler zwischen z und z_1?

d) Interpretieren Sie die Beobachtungen, die Sie in b) und c) gemacht haben.

e) Überlegen Sie sich eine Alternative, wie man bei dem gestellten Problem für $x \gg 1$ das Problem der Auslöschung umgehen kann.

Aufgabe 12 *(Matrixnormen)* (3+3+2=8 Punkte)

Eine Matrixnorm hat die gleichen Eigenschaften wie eine Vektornorm (siehe Skript, Anhang B.2): Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$

(i) $||A|| \geq 0$ und $= 0 \Leftrightarrow A = 0$

(ii) $\lambda \in \mathbb{R}$: $||\lambda A|| = |\lambda|\,||A||$

(iii) $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$.

Eine Matrixnorm $||\cdot||_M$ heißt durch eine Vektornorm $||\cdot||_V$ induziert, falls gilt

$$||A||_M = \sup_{x\neq 0} \frac{||Ax||_V}{||x||_V}$$

a) Zeigen Sie, dass die Matrixnorm $||A||_2 := \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$ durch die euklidische Norm induziert wird.

b) Zeigen Sie: $||A^{-1}|| = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}(A^T A)}}$

c) Berechnen Sie die Konditionszahl $\kappa_2 := ||A||_2 ||A^{-1}||_2$ der folgenden Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$