Prof. Dr. Dirk Lebiedz
M.Sc. Pascal Heiter
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle

Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik
Wintersemester 2013/14

Numerische Lineare Algebra - Übungsblatt 4

(Abgabe: Mittwoch, 11. Dezember 2013)

Aufgabe 13 *(Spezielle Matrixstrukturen)* (5+5=10 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade und eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Schachbrett-Muster

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & a_{1,3} & 0 & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & a_{2,4} & \cdots & 0 & a_{2,n} \\ a_{3,1} & 0 & a_{3,3} & 0 & \cdots & a_{3,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & 0 & a_{n-1,3} & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & a_{n,2} & 0 & a_{n,4} & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

gegeben. Um beim Lösen des Gleichungssystems $Ax = b$ sowohl Speicher als auch Rechenaufwand zu sparen, kann wie folgt verfahren werden:

1. Spalte die Matrix auf in zwei Teilmatrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{3,1} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,4} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{4,2} & a_{4,4} & \cdots & a_{4,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,2} & a_{n,4} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

2. Löse die Gleichungssysteme

$$A_1(x_1, x_3, \cdots, x_{n-1})^T = (b_1, b_3, \cdots b_{n-1})^T \quad \text{und} \quad A_2(x_2, x_4, \cdots, x_n)^T = (b_2, b_4, \cdots b_n)^T.$$

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben:

(a) Berechnen Sie den Rechenaufwand für obige Methode zur Lösung eines Gleichungssystems mit Schachbrett-Matrix und vergleichen Sie ihn mit dem Aufwand zum Lösen des vollen Systems für $n = 2, 4, 6, 20$. Als Lösungsmethode wird jeweils Vorwärts-/Rückwärtseinsetzen mit einer einfachen LR-Zerlegung gewählt. Um welchen Faktor ist die angepasste Methode asymptotisch schneller als die Standard-LR-Zerlegung mit Vorwärts-/Rückwärtseinsetzen?

(b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

mit dem oben beschriebenen Algorithmus.

Aufgabe 14 *(Symmetrisch positiv definite Matrizen)* (5+5=10 Punkte)

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit. Zeigen Sie:

a) $\quad |a_{ij}| < \sqrt{a_{ii}a_{jj}} \leq \frac{1}{2}(a_{ii} + a_{jj}) \qquad \forall\, 1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$

b) $\quad \max\limits_{i\neq j} |a_{ij}| < \max\limits_{1\leq i\leq n} a_{ii}$

Aufgabe 15 *(Cholesky-Zerlegung I)* (10 Punkte)

Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung (siehe Skript, S. 49) von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 30 \end{pmatrix}$$

indem Sie eine untere Dreiecksmatrix L mit $\ell_{ii} > 0$ derart bestimmen, dass $A = LL^T$.

Aufgabe 16 *(Cholesky-Zerlegung II, LaTeX-Aufgabe)* (3+3+4=10 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, a \in \mathbb{R}^{n-1}$ mit $||a||_2 < 1$ sowie $b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}^{n-1}$. Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & a^T \\ a & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit der Einheitsmatrix $I \in \mathbb{R}^{n-1 \times n-1}$. Unser Ziel ist die Berechnung von $u \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^{n-1}$ mit Hilfe der Choleksy-Zerlegung.

a) Berechnen Sie für $a^T = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ die Cholesky-Zerlegung von A und geben Sie dabei **alle** Zwischenergebnisse (in Bruchdarstellung) an.

b) Betrachten Sie das geänderte lineare Gleichungssystem

$$\hat{A} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} I & a \\ a^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass die Cholesky-Zerlegung von $\hat{A} = \hat{L}\hat{L}^T$ gegeben ist mit

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ a^T & \sqrt{1 - a^T a} \end{pmatrix}.$$

c) Welches der linearen Gleichungssysteme (1) oder (2) ist für ein allgemeines $a \in \mathbb{R}^{n-1}$ mit $||a||_2 < 1$ effizienter lösbar mittels Cholesky-Zerlegung für $n \gg 1$? Begründen Sie ihre Antwort.