Prof. Dr. Dirk Lebiedz
M.Sc. Pascal Heiter
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle

Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik
Wintersemester 2013/14

Numerische Lineare Algebra - Übungsblatt 5

(Abgabe: Mittwoch, 8. Januar 2014)

Aufgabe 17 *(Determinanten von Tridiagonalmatrizen)* (8 Punkte)

Seien folgende Tridiagonalmatrizen gegeben

$$J_n := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & & \dots & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & \\ 0 & \dots & & 0 & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \dots & & & 0 & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \qquad , n = 1, 2, ...$$

Zeigen Sie, dass folgende Drei-Term Rekursion erfüllt ist

$$\det J_n = a_n \det J_{n-1} - b_{n-1} c_{n-1} \det J_{n-2}.$$

Aufgabe 18 *(Householder-Matrizen)* (3+4+4+3=14 Punkte)

Sei $\omega \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und

$$P := I - 2\frac{\omega\omega^T}{\omega^T\omega}$$

a) Zeigen Sie, dass $E := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Px = x\}$ auch durch $E = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \omega^T x = 0\}$ dargestellt werden kann.

b) Berechnen Sie zu $\omega = (2, 3, -1)^T$ die Householdermatrix P.

c) Zeigen Sie

$$x \in \mathbb{R}^n \qquad \Rightarrow \qquad \exists\, t \in \mathbb{R} : \quad Px = x + t\omega \quad \text{und} \quad x + \frac{t}{2}\omega \in E.$$

Hinweis: Um den zweiten Teil zu zeigen, definieren Sie $z := x + \frac{t}{2}\omega$ und berechnen Sie Pz.

d) Skizzieren Sie die Menge E für $\omega = (2, 3)^T$.

Aufgabe 19 *(QR-Zerlegung und Cholesky-Zerlegung)* (10 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär und eine Cholesky-Zerlegung von $A^T A$ gegeben durch

$$A^T A = LL^T.$$

Zeigen Sie, dass die QR-Zerlegung von A gegeben ist durch

$$Q = A\left(L^T\right)^{-1} \qquad \text{und} \qquad R = L^T.$$

Aufgabe 20 *(Ausgleichsproblem)* (8 Punkte)

In der Chemie spielt die Arrhenius-Gleichung zur Bestimmung der Reaktionsgeschwindigkeit K eine große Rolle. Dabei wird diese in Abhängigkeit der Temperatur T durch

$$K = A \cdot \exp\left(-\frac{E}{RT}\right)$$

bestimmt, wobei $R = 8.314\frac{J}{K\cdot\text{mol}}$ die universelle Gaskonstante, A eine Konstante und E die Aktivierungsenergie der chemischen Reaktion ist. Durch ein Experiment werden Daten (K_i, T_i) für $i \in \{1, ..., m\}$ gemessen. Die Unbekannten A und E sollen über die Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden. Formulieren Sie dieses Problem als **lineares** Ausgleichsproblem und geben Sie die zugehörigen Matrizen und Vektoren an.

Wir wünschen Ihnen und Ihren Familien ein frohes Fest und einen guten Rutsch ins Jahr 2014!