Prof. Dr. Dirk Lebiedz
M.Sc. Pascal Heiter
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle

Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik
Wintersemester 2013/14

Numerische Lineare Algebra - Übungsblatt 6

(Abgabe: Mittwoch, 22. Januar 2014)

Hinweise

- Bitte melden Sie sich so bald als möglich im LSF zur Vorleistung an. Die Vorleistung wird am 6.2.2014 verbucht.
- Vorleistung: $\geq$ 140 Punkte in den Theorieblättern und $\geq$ 60 Punkte in den Matlabblättern sowie mindestens 2 abgegebene geTEXte Aufgaben.
- Das einzige, zugelassene Hilfsmittel in der Klausur wird ein handbeschriebenes DIN A4 Blatt sein.

Aufgabe 21 *(Ausgleichsparabel)* (6 Punkte)

Gegeben seien die Daten

$$(t_0, f_0) = (0, -1), \qquad (t_1, f_1) = (1, 0), \qquad (t_2, f_2) = (2, 3) \qquad \text{und} \qquad (t_3, f_3) = (3, 8).$$

Bestimmen Sie eine Ausgleichsparabel

$$p(t) = d_1 + d_2 t + d_3 t^2$$

derart, dass die Summe der Fehlerquadrate

$$\sum_{i=0}^{3} (p(t_i) - f_i)^2$$

minimal wird.

Aufgabe 22 *(Lineares Ausgleichsproblem)* (4+4=8 Punkte)

Sei $x, f \in \mathbb{R}^n$ Messdaten und

$$T := \begin{pmatrix} m & b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & m & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & m & b & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & b & m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Weiter seien m^* und b^* definiert durch

$$(m^*, b^*) = \arg \min_{(m,b) \in \mathbb{R}^2} ||Tx - f||_2 .$$

a) Formulieren Sie dieses Problem als *least squares* Problem, also

$$y^* = \arg \min_{y \in \mathbb{R}^k} ||Ay - d||_2$$

mit geeignetem $A \in \mathbb{R}^{j \times k}$ und $d \in \mathbb{R}^j$.

b) Lösen Sie das Ausgleichsproblem für die Datenpaare

x_i	0	1	2	3
f_i	-2	-1	3	4

.

Aufgabe 23 *(Varianz-Kovarianz-Matrix $(A^T A)^{-1}$)* (3+7=10 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $\operatorname{rang} A = n \leq m$ und $C = (A^T A)^{-1}$ sowie $A = QR$ die QR-Zerlegung von A. Ferner sei $\tilde{R} = (r_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ der obere (quadratische) Teil von R.

a) Zeigen Sie, dass $C = \tilde{R}^{-1}\tilde{R}^{-T}$ gilt.

b) Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, v \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $S \in \mathbb{R}^{m-1\times n-1}$ obere Dreiecksmatrix mit $\operatorname{rang} S = n-1$. Zeigen Sie, dass für

$$R = \begin{pmatrix} \alpha & v^T \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

mit $C_0 := (S^T S)^{-1}$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^2}(1 + v^T C_0 v) & -\frac{1}{\alpha} v^T C_0 \\ -\frac{1}{\alpha} C_0 v & C_0 \end{pmatrix}$$

folgt.

Aufgabe 24 *(Abschätzungen für den Fehler bei iterativen Methoden)* (6+6+4=16 Punkte)

Betrachte das Iterationsverfahren

$$x_{k+1} = \varphi(x_k),$$

mit der Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\varphi(x) = Cx + d,$$

und einem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^n$, wobei $d \in \mathbb{R}^n$ und $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $L := ||C|| < 1$.

a) Zeigen Sie für $k \in \mathbb{N}_0$

$$||x_{k+1} - x_k|| \leq L^k \, ||x_1 - x_0|| \, .$$

b) Sei $x^* := \lim\limits_{k\to\infty} x_k$. Begründen Sie, warum der Grenzwert x^* existiert und zeigen Sie weiter

$$||x_k - x^*|| \leq \frac{L^k}{1-L} \, ||x_1 - x_0|| \, .$$

c) Sei

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wie viele Iterationen benötigt man, damit der Fehler auf jeden Fall kleiner ist als $\varepsilon := 0.001$, also damit gilt

$$||x_k - x^*|| < \varepsilon \, ?$$
