Prof. Dr. Dirk Lebiedz
M.Sc. Pascal Heiter
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle

Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik
Wintersemester 2013/14

Numerische Lineare Algebra - Übungsblatt 7

(Abgabe: Mittwoch, 5. Feburar 2014)

Aufgabe 25 *(Gauß-Seidel Verfahren)* (10+2=12 Punkte)

a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie, dass das Gauß-Seidel Verfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit $b \in \mathbb{R}^n$ konvergiert.

b) Führen Sie von Hand zwei Schritte des Gauß-Seidel Verfahrens für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$$

aus und verwenden Sie als Startwert $x_0 = (0, 1, 1)^T \in \mathbb{R}^3$. Vermeiden Sie die Berechnung von Inversen.

Aufgabe 26 *(Satz von Stein und Rosenberg)* (6+3=9 Punkte)

Seien die Matrizen $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben mit

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie jeweils die Iterationsmatrizen C_{GS} und C_J , sowie deren Spektralradien.

b) Was lässt sich über die Konvergenz der beiden Verfahren mit den jeweiligen Matrizen A_i mit $i = 1, 2$ sagen? Widerspricht dies dem Satz von Stein und Rosenberg?

Aufgabe 27 *(Relaxiertes Richardson Verfahren)* (5+5+2=12 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und $b \in \mathbb{R}^n$. Das relaxierte Richardson-Verfahren wird durch

$$x_{k+1} = x_k - \omega(Ax_k - b)$$

beschrieben.

a) Zeigen Sie, dass folgende Fehlerabschätzung gilt

$$||x_k - x^*||_2 \leq \rho(I - \omega A)^k \, ||x_0 - x^*||_2$$

wobei $\rho(\cdot)$ der Spektralradius bezeichnet und x^* die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ist.

b) Sei $0 < c \leq \lambda \leq C$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$. Wie muss man ω wählen, damit die Richardson-Iteration möglichst schnell im Sinne der euklidischen Norm gegen die Lösung x^* konvergiert? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

c) Führen Sie zwei Schritte des relaxierten Richardson-Verfahrens mit optimalem Parameter ω für folgende Daten aus:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 28 *(Gradienten Verfahren)* (7 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Führen Sie vier Schritte des Gradienten Verfahrens für den Startwert

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aus und zeichnen Sie $x_0, ..., x_4$ in ein zweidimensionales Koordinatensystem. Was fällt auf?