Prof. Dr. Stefan Funken
M.Sc. Andreas Bantle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Übungsblatt 1

(Besprechung Mo. 28.10. 2013.)

Aufgabe 1 *(Charakterisierung von PDEs)*

Charakterisieren Sie die folgenden partiellen Differentialgleichungen:

(i) $-u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = 0$

(ii) $\frac{5}{2}u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = 0$

(iii) $9u_{xx} + 12u_{xy} + 4u_{yy} = 0$

(iv) $(1-x^2)u_{xx} + 2xy\,u_{xy} + (1-y^2)u_{yy} = 2x\,u_x + 2y\,u_y$

Aufgabe 2 *(Differenzenstern)*

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $u \in \mathcal{C}^4(\Omega)$ gegeben. Man bestimme die Koeffizienten $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ sodass

$$u''(x) = \frac{1}{h^2}\left(a\,u(x-2h) + b\,u(x-h) + c\,u(x+h) + d\,u(x+2h) + e\,u(x)\right) + \mathcal{O}(h^5)$$

gilt.

Aufgabe 3 *(Finite Differenzen Methode:* Matlab*)*

Wir betrachten die Poisson Gleichung auf dem Einheitsquadrat $\Omega := (0,1)^2$ mit Rand Γ:

$$\begin{aligned} -\Delta u(x,y) &= f(x,y), && \text{in } \Omega \\ u(x,y) &= 0, && \text{auf } \Gamma_D \\ \frac{\partial}{\partial n}u(x,y) &= g(x,y), && \text{auf } \Gamma_N := \Gamma \backslash \overline{\Gamma_D}. \end{aligned} \tag{1}$$

Zur Anwendung der FDM definieren wir ein Gitter auf $\overline{\Omega}$ mit $M^2 \in \mathbb{N}$ inneren Punkten und Gitterweite $h = \frac{1}{M+1}$:

$$(x_i, y_j) = (i \cdot h, j \cdot h), \quad i, j = 0, ..., M+1.$$

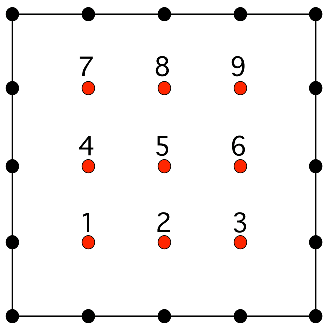
Für die Diskretisierung des Laplace Operators verwenden wir an allen inneren Punkten den "5-Punkte-Stern":

$$\Delta_h u(x,y) = \frac{4u(x,y) - u(x-h,y) - u(x+h,y) - u(x,y-h) - u(x,y+h)}{h^2}$$

(i) Wir betrachten zunächst das Dirichlet-Problem, d.h. $\Gamma = \Gamma_D$. Für die inneren Knoten führen wir die folgende lexikographische Nummerierung ein:

$$z_k := (x_i, y_j), \quad \text{mit } k = (j-1)M + i, \quad i, j = 1, ..., M.$$

Das Gitter für $M = 3$ (also 9 innere Punkte) ist mit Nummerierung in nebenstehender Grafik abgebildet.

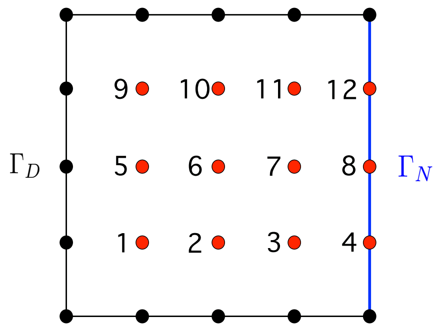


- Geben Sie die Steifigkeitsmatrix und die rechte Seite des LGS an.
- Laden Sie sich das Skript `FDM_Dirichlet.m` von der Homepage, welches die Lösung des Poissongleichung mit der FDM berechnet. Vervollständigen Sie den Code an den mit Kommentaren markierten Stellen:

- Stellen Sie die Steifigkeitsmatrix A und die rechte Seite b auf.
- Stellen Sie die Lösung U graphisch dar
- Plotten Sie den Fehler über $\frac{1}{h}$ in doppelt logarithmischer Skala und bestimmen Sie die Konvergenzordnung.

(ii) Wir betrachten nun das gemischte Poisson-Problem mit

$$\Gamma_N = \{1\} \times (0,1) \quad \text{und} \quad \Gamma_D = \Gamma \backslash \Gamma_N.$$



Da die Lösung auf dem Neumann-Rand auch unbekannt ist, muss dies im LGS berücksichtigt werden. Wir führen also für

$$i = 1, ..., M+1 \quad \text{und} \quad j = 1, ..., M$$

folgende Ordnung der Knoten ein:

$$z_k := (x_i, y_j), \quad \text{mit } k = (j-1)(M+1) + i.$$

Das Gitter samt Nummerierung ist in der nebenstehenden Grafik abgebildet.

Analog zur Vorlesung betrachten wir für die Randknoten die folgende Approximation des Laplace-Operators

$$\begin{aligned} -\Delta_h^N u(x,y) &:= \frac{4u(x,y) - 2u(x-h,y) - u(x,y+h) - u(x,y-h)}{h^2} - \frac{2}{h}\frac{\partial}{\partial n}u(x,y) \\ &= \frac{4u(x,y) - 2u(x-h,y) - u(x,y+h) - u(x,y-h)}{h^2} - \frac{2}{h}g(x,y). \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir folgende Gleichung an den Neumann-Knoten:

$$-\Delta_h^N u(x,y) = f(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4u(x,y) - 2u(x-h,y) - u(x,y+h) - u(x,y-h)}{h^2} = f(x,y) + \frac{2}{h}g(x,y).$$

- Welche Konsistenzordnung erhalten wir mit obiger Approximation an den Neumann-Knoten?
- Wie sieht die Steifigkeitsmatrix und die rechte Seite aus?
- Laden Sie sich das Skript `FDM_Neumann.m` von der Homepage und vervollständigen Sie den Code. Gehen Sie dabei wie in Teilaufgabe (i) vor.