Prof. Dr. Stefan Funken
M.Sc. Andreas Bantle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Übungsblatt 3

(Besprechung Mo. 11.11.2013)

Aufgabe 7 *(Polarkoordinaten)*

Die Polarkoordinaten sind gegeben durch $(x,y) := r(\cos\varphi, \sin\varphi)$ mit $r > 0$ und $\varphi \in (-\pi, \pi]$.

(i) Zeigen Sie: Der Gradient bezüglich Polarkoordinaten ist gegeben durch

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} u - \frac{1}{r} \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} u \\ \sin\varphi \frac{\partial}{\partial r} u + \frac{1}{r} \cos\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} u \end{pmatrix}$$

(ii) Zeigen Sie: Der Laplace-Operator bezüglich Polarkoordinaten ist gegeben durch

$$\Delta u = \frac{\partial^2}{\partial r^2} u + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} u + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} u.$$

(iii) Berechnen Sie ∇u und Δu für in Polarkoordinaten gegebene Funktion

$$u(r,\varphi) := r^{2/3} \sin\left(\frac{2}{3}\varphi\right).$$

Aufgabe 8 *(Finite Elemente Methode:* MATLAB *)*

Wir betrachten die folgende Variationsformulierung:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit Rand $\Gamma := \Gamma_D \cup \Gamma_N$, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma_N)$ und $u_D \in H^1(\Omega)$. Suche $u \in H_0^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ auf } \Gamma_D\}$, so dass:

$$\int_\Omega \nabla u^T \nabla v \; dx = \int_\Omega f\, v \; dx + \int_{\Gamma_N} g\, v \; ds - \int_\Omega \nabla u_D^T \nabla v \; dx \qquad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{1}$$

Für die Implementierung definieren wir eine Triangulierung $\mathcal{T}_h$ auf dem Gebiet Ω und den diskreten Ansatz-Raum $S(\mathcal{T}_h)$ mit Basis-Funktionen φ_i, $i = 1, .., N$. Für die gesuchte Lösung wählen wir den Ansatz

$$u_h(x,y) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k(x,y)$$

und testen (1) mit allen Basis-Funktionen φ_j, $j = 1, ..., N$. Wir erhalten dadurch das LGS

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

mit dem Koeffizientenvektor $\mathbf{x} = (\alpha_k)_{k=1,\dots,N}$, der Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{A} = (a_{i,j})_{j,k=1,\dots,N}, \quad a_{j,k} = \int_\Omega \nabla\varphi_k^T \nabla\varphi_j \, dx$$

und der rechten Seite

$$\mathbf{b} = (b_j)_{j=1,\dots,N}, \quad b_j = \int_\Omega f\, \varphi_j \; dx + \int_{\Gamma_N} g\, \varphi_j \; ds - \int_\Omega \nabla u_D^T \nabla\varphi_j \; dx.$$

(i) Laden Sie sich die Datei `fem2d` von der Homepage herunter und entpacken Sie die zip-Datei.

(ii) Stellen Sie den Vektor $\mathbf{b}$ für die rechte Seite auf. Verwenden Sie dabei folgende Näherungen

$$\int_T f\, \varphi_j \; dx \approx f(x_S, y_S) \int_T \varphi_j \; dx = f(x_S, y_S) \, \frac{1}{6} \, \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}$$

und

$$\int_E g\, \varphi_j \, ds \approx \frac{|E|}{2} \, g(x_M, y_M),$$

wobei (x_S, y_S) den Schwerpunkt des Dreiecks $T \in \mathcal{T}_h$ und (x_M, y_M) der Mittelpunkt der Kante E auf dem Neumann-Rand bezeichnet. Testen Sie ihre Funktion am Beispiel `Lshape`.

(iii) Erweitern Sie das Skript `fem2d.m`, sodass die folgende Variationsformulierung gelöst werden kann:
Suche $u \in H^1(\Omega)$, so dass $\forall v \in H^1(\Omega)$ und $\kappa \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_\Omega \nabla u^T \nabla v \; dx + \kappa \int_\Omega u \, v \; dx = \int_\Omega f \, v \; dx + \int_{\Gamma_N} g \, v \; ds - \int_\Omega \nabla u_D^T \nabla v \; dx. \tag{2}$$

Stellen Sie dazu die Massematrix M (siehe Blatt2, Aufgabe 6 (i)) auf und testen Sie das Programm am Beispiel `Square` für $\kappa = 2$.

Aufgabe 8 *(FEM, Wärmeleitungsgleichung:* MATLAB *)*
Die Wärmeleitungsgleichung ist für $T > 0$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} u(x,y,t) - \Delta u(x,y,t) &= f(x,y,t), && \text{in } \Omega \times [0,T] \\
u(x,y,t) &= u_D(x,y,t), && \text{auf } \Gamma_D \times [0,T] \\
\frac{\partial}{\partial n} u(x,y,t) &= g(x,y,t), && \text{auf } \Gamma_N \times [0,T] \\
u(x,y,0) &= 0
\end{aligned}$$

Um die Wärmeleitungsgleichung zu lösen, verwenden wir ein implizites Euler-Verfahren in der Zeit. Dazu teilen wir das Zeitintervall in N äquidistante Teilintervalle der Länge $dt = \frac{T}{N}$ auf. Mit $u_k(x,y) := u(x,y,k \cdot dt)$ und $f_k(x,y) := f(x,y,k \cdot dt)$ erhalten wir in jedem Zeitschritt die Gleichung

$$u_{k+1} - dt \Delta u_{k+1} = u_k + dt f_{k+1}.$$

Die schwache Formulierung (bzgl. des Ortes) lautet dann

$$\int_\Omega u_{k+1} \, v \; dx + dt \cdot \int_\Omega \nabla u_{k+1}^T \nabla v \; dx = \int_\Omega u_k \, v \; dx + dt \cdot \left(\int_\Omega f_{k+1} \, v \; dx + \int_{\Gamma_N} g_{k+1} \, v \; ds - \int_\Omega \nabla u_{D,k+1}^T \nabla v \; dx \right).$$

Mit gleichem Vorgehen wie in Aufgabe 7 erhalten wir das LGS

$$(M + dt \cdot A) x_{k+1} = M x_k + dt \cdot b.$$

(i) Schreiben sie eine Funktion `fem2d_heat.m` die die Wärmeleitungsgleichung löst (viele Teile aus `fem2d.m` können übernommen werden). Speichern Sie die Lösungen in allen Zeitschritten in der Matrix `u` ab.

(ii) Stellen Sie den Temperaturverlauf graphisch dar.

(iii) Testen Sie ihr Programm m Beispiel `Square_heat`