Prof. Dr. Stefan Funken
M.Sc. Andreas Bantle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm



# Übungsblatt 8

(Besprechung Mo. 27.02.2014)

**Aufgabe 19** *(Singulär gestörte Probleme)*

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $1 \gg \varepsilon > 0$ und $f \in L^2(\Omega)$. Wir betrachten das singulär gestörte Problem

$$\begin{aligned} -\varepsilon\Delta\, u + u &= f \qquad &&\text{in } \Omega \\ u &= u_D &&\text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit äquivalenter Variationsformulierung ($s(x) := \frac{1}{\varepsilon}$):

Suche $u \in H_0^1(\Omega)$, sodass

$$\int_\Omega \nabla u^T \nabla v \; dx + \int_\Omega s(x)\; uv \; dx = \int_\Omega s(x)\; fv \; dx \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Mit den standard $\mathcal{P}^1$-Elementen erhalten wir das lineare Gleichunssystem $Ax = b$ mit

$$a_{i,j} = \int_\Omega \nabla\varphi_i^T \nabla\varphi_j \; dx + \int_\Omega s(x)\; \varphi_i\varphi_j \; dx$$

und

$$b_j = \int_\Omega s(x)\; f\varphi_j \; dx + \int_{\Gamma_N} g\varphi_j \; ds - \int_\Omega \nabla u_D^T \nabla\varphi_j \; dx - \int_\Omega s(x)\; u_D\varphi_j \; dx,$$

wobei wir mit $\varphi_j$, $j = 1, ..., nE$ die Basisfunktionen (Hutfunktionen) bezeichnen.

(i) Laden Sie sich die gezipte Dateie `material.zip` von der Homepage und entpacken Sie diese.

(ii) Erweitern Sie die Funktion `stima3.m`, sodass für $s \in L^2(\Omega)$

$$a_{i,j} = \int_\Omega \nabla\varphi_i^T \nabla\varphi_j \; dx + \int_\Omega s(x)\; \varphi_i\varphi_j \; dx$$

berechnet wird. Das zweite Integral soll dabei über die Mittelpunktsformel approximiert werden (siehe Blatt 3 Aufgabe 8 *(ii)*).

(iii) Testen Sie Ihre Funktion am Beispiel `Square`.

(iv) Testen Sie Ihre Funktion am Beispiel `Square2`. Was fällt Ihnen auf?

Für das zweite Integral verwendet man in der Praxis aus Gründen besserer numerischer Stabilität auch oft folgende Näherung

$$\int_\Omega s(x)\; \varphi_i\varphi_j \; dx \approx \delta_{i,j}\, s(P_i)\, D_i,$$

wobei wir mit $D_i$ die in Abbildung 1 markierte Fläche bezeichnen. Dieses Verfahren wird auch mit *mass lumping* bezeichnet.

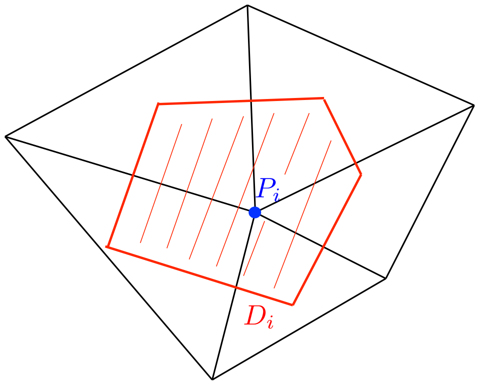


Abbildung 1: Fläche $D_i$ in rot (Das Polygon, das durch die Mittelsenkrechten aller Kanten erzeugt wird, die von $P_i$ weglaufend.)

(iv) Implementieren Sie eine Funktion `D = computeDi(vertices)`, die zu den Eckpunkten $P_i$, $P_j$ und $P_k$ eines Dreiecks (in `vertices` übergeben) die entsprechenden Anteile von $D_i$, $D_j$ und $D_k$ berechnet und im Vektor `D` zurück gibt.

(v) Schreiben Sie eine Funktion `stimaLump.m`, in der die Steifigkeitsmatrix mittels *mass lumping* aufgestellt wird.

(vi) Testen Sie Ihre Funktion an den Beispielen `Square` und `Square2`. Verwenden Sie im Beispiel `Square2` insbesondere $\varepsilon = 10^0$, $10^{-3}$, $10^{-6}$, $10^{-9}$ für die Funktion $s$. Vergleichen Sie beide Verfahren zum Aufstellen der Steifigkeitsmatrix.