Prof. Dr. Stefan Funken
M.Sc. Andreas Bantle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Übungsblatt 9

(Besprechung Mo. 03.02.2014)

Aufgabe 20 *(Poisson-Problem als gemischtes Problem)*
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $f \in L^2(\Omega)$. Wir betrachten das Poisson Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

(i) Schreiben Sie (1) in ein Sattelpunktpunkt-Problem (SPP) um. Geben Sie bei der Herleitung insbesondere die Bilinearformen $a : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ und $b : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ mit den Vektorräumen $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ an.

(ii) Zeigen Sie, dass das SPP wohlgestellt ist, d.h. dass a elliptisch ist und b die inf-sup-Bedingung erfüllt.

(iii) Zeigen Sie: Diskretisiert man die Räume $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ durch

$$\mathcal{X}_h := \{v \in L^2(\Omega)^2 : \; v|_T \in \mathcal{P}^2_{k-1}(T), \; T \in \mathcal{T}_h\}$$

und

$$\mathcal{Y}_h := \{v \in L^2(\Omega) : \; v|_T \in \mathcal{P}_k(T), \; T \in \mathcal{T}_h\} \cap H^1_0(\Omega)$$

so ist die LBB-Bedingung erfüllt.

Aufgabe 21 *(Koerzivitäts- und inf-sup-Konstante,* Matlab*)*
Es sei $\mathcal{X} = H^1_0(\Omega)$, $(\cdot,\cdot)_1$ das H^1-Skalarprodukt und $\|\cdot\|_1$ die H^1-Norm. Ferner sei für $b \in \mathbb{R}^2$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ die Bilinearform $a : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u^T \nabla v \, dx + \int_\Omega b^T \nabla u \, v \, dx + \gamma \int_\Omega u \, v \, dx.$$

Wie auf Blatt 3 sei $S(\mathcal{T}_h) \subset \mathcal{X}$ der diskrete Ansatz-Raum, der von den Hutfunktionen φ_i aufgespannt wird, A die Matrix, die zur Bilinearform a assoziiert ist, und M die Matrix, die zum H^1-Skalarprodukt assoziiert ist ($m_{i,j} := \int_\Omega \nabla\varphi_i^T \nabla\varphi_j \, dx + \int_\Omega \varphi_i^T \varphi_j \, dx$).
In dieser Aufgabe wollen wird

$$\alpha_h := \inf_{v \in S(\mathcal{T}_h)\setminus\{0\}} \frac{a(v,v)}{\|v\|_1^2} \tag{2}$$

$$\beta_h := \inf_{v \in S(\mathcal{T}_h)\setminus\{0\}} \sup_{w \in S(\mathcal{T}_h)\setminus\{0\}} \frac{a(v,w)}{\|v\|_1 \, \|w\|_1} \tag{3}$$

numerisch bestimmen.

(i) Laden Sie sich die zip-Datei `material9.zip` von der Homepage.

(ii) Schreiben Sie die Funktionen `alpha = CoerzRand(A,M,N)` und `beta = InfSupRand(A,M,N)`, die die Konstanten α_h und β_h approximieren. Dazu sollen jeweils N Zufallsvektoren als Koeffizientenvektoren von v und w angelegt werden und das Supremum bzw. Infimum durch das Maximum bzw. Minimum der Einträge berechnet werden. Achten Sie bei der Implementierung auf die Vektorisierung in Matlab (keine `for`-Schleifen!).

Alternativ kann man die Berechnung beider Konstanten auch auf Eigenwertprobleme (EWP) zurückführen.

(iii) Zeigen Sie: α_h ist der kleinste Eigenwert des verallgemeinerten EWP

$$A_s x = \lambda M x,$$

wobei $A_s := \frac{1}{2}(A + A^T)$ den symmetrischen Anteil von A bezeichnet.

Um die inf-sup-Konstante auf ein passendes EWP zurückzuführen definieren wir einen Operator T mit

$$
\begin{aligned}
&T : S(\mathcal{T}_h) \to S(\mathcal{T}_h)\\
&(Tw, v)_1 = a(w, v) \quad \forall\, v \in S(\mathcal{T}_h).
\end{aligned}
$$

Der Satz von Riesz liefert uns dann

$$\|Tw\|_1 = \|a(w, \cdot)\|_{-1} =: \sup_{v\in S(\mathcal{T}_h)} \frac{A(w, v)}{\|v\|_1}.$$

Damit erhalten wir

$$\beta_h^2 := \left(\inf_{v\in S(\mathcal{T}_h)\setminus\{0\}} \sup_{w\in S(\mathcal{T}_h)\setminus\{0\}} \frac{a(v, w)}{\|v\|_1\ \|w\|_1} \right)^2 = \inf_{v\in S(\mathcal{T}_h)\setminus\{0\}} \frac{\|Tw\|^2}{\|w\|_1^2} = \inf_{v\in S(\mathcal{T}_h)\setminus\{0\}} \frac{(Tw, Tw)_1}{(w, w)_1}$$

Aus der Definition des Operators T erhalten wir die Matrix-Darstellung $T = M^{-1}A^T$ (wieso?). Damit ergibt sich

$$\beta_h^2 = \inf_{v\in S(\mathcal{T}_h)\setminus\{0\}} \frac{(Tw, Tw)_1}{(w, w)_1} = \inf_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{x^T AM^{-1}MM^{-T}A^T x}{x^T Mx} = \inf_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{x^T AM^{-1}A^T x}{x^T Mx}.$$

Also ist β_h die Wurzel des kleinstes EW von

$$AM^{-1}A^T x = \lambda Mx.$$

(iv) Erweitern Sie das Skript `main.m`, sodass die Konstanten α_h und β_h über EWP berechnet werden.

(v) Erweitern Sie das Skript `main.m`, sodass die Ausgangstriangulierung mehrfach verfeinert wird und berechnen Sie die Konstanten zu jeder Triangulierung. Plotten Sie die Konstanten in Abhängigkeit der Freiheitsgrade. Was stellen Sie fest?