Prof. Dr. Karsten Urban
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

WiSe 2014/2015
Blatt 5
14.11.2014

Angewandte Numerik 2

Abgabetermin: Freitag, 21.11.2014, **vor der Übung**

Für dieses Übungsblatt gibt es 20 Theorie- und 19 Matlab-Punkte, sowie 10 Theorie- und 6 Matlab-Zusatzpunkte. Punkte, die mit einem * gekennzeichnet sind, sind Zusatzpunkte.
Die 50-Prozent-Grenzen liegen aktuell (inklusive Blatt 5) bei 50 Theoriepunkten und 46,5 Matlabpunkten.

Aufgabe 19 *(Konvergenzrate des Gradienten-Verfahrens)* (8T+2T* Punkte)

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$A\,x = b \qquad \text{mit} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei $a \gg 1$. Auf dieses Gleichungssystem wollen wir das Gradienten-Verfahren mit dem Startwert $x_0 = (a, 1)^T$ anwenden.

a) Zeigen Sie , dass für die Iterierten $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)})^T$ des Gradienten-Verfahrens

$$x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{pmatrix} = \rho \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ -x_2^{(k)} \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \rho = \frac{a-1}{a+1}$$

gilt.
Hinweis: Sie können diese Behauptung mit vollständiger Induktion zeigen.

b) Zeichnen Sie für $a = 20$ die ersten Iterierten $x_0, \ldots x_5$ in ein zweidimensionales Koordinatensystem. Achten Sie auf eine geeignete Skalierung der Achsen.

Aufgabe 20 *(Energie-Skalarprodukt)* (8T Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}$ eine symmetrisch positiv definite Matrix. Zeigen Sie, dass durch die Abbildung $(\cdot,\cdot)_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $(x, y)_A := x^T Ay$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ definiert wird.

Aufgabe 21 *(cg-Verfahren)* (8T* Punkte)

Betrachten Sie die quadratische Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$, $x \in \mathbb{R}^2$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das Minimum von f unter Verwendung des cg-Verfahrens. Wählen Sie als Startwert $x_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und rechnen Sie mit Brüchen. Erklären Sie in jedem Schritt, welche anschauliche Bedeutung dieser Schritt hat. Sie müssen nicht den Algorithmus 2.7.1 aus dem Skript anwenden, sondern können sich an der Herleitung des cg-Verfahrens in der Vorlesung orientieren. Wie viele Iterationsschritte haben Sie benötigt, um das exakte Minimum zu berechnen? Woran liegt das?

Aufgabe 22 *(Programmieraufgabe: cg-Verfahren)* (6M+3M+3M* Punkte)

a) Schreiben Sie eine Matlabfunktion `xk =cgVerfahren(A, b, x0, maxIt, tol)`, die mit dem cg-Verfahren das lineare Gleichungssystems $Ax = b$ iterativ löst. `x0` soll dabei der Startwert und `maxIt` eine obere Schranke für die Anzahl der durchgeführten Iterationen sein. `tol` soll die Genauigkeit der Lösung steuern. Ihre Matlabfunktion soll im Vektor `xk` alle Iterationswerte $x^{(k)}$ zurück geben.

b) Schreiben Sie ein Matlabskript `testCgVerfahren`, das Ihre Matlabfunktion `cgVerfahren` am Beispiel aus Aufgabe 15 vom letzten Übungsblatt testet. Zeichnen Sie den Verlauf der Iteration in ein Schaubild. Zeichnen Sie in das gleiche Schaubild auch den Verlauf der Iteration des Gradienten-Verfahrens. Erläutern Sie das Schaubild.

c) Erweitern Sie Ihr Matlabskript `testCgVerfahren`. Zeichnen Sie in ein neues Schaubild den Verlauf der Iteration des Gradienten-Verfahrens und den Verlauf der Iteration des cg-Verfahrens für das Beispiel aus Aufgabe 21. Erklären Sie auch dieses Schaubild.

Aufgabe 23 *(Programmieraufgabe: Konvergenzraten Gradienten- und cg-Verfahren)*
(10M+2T+3M*+2T Pkte)

a) Schreiben Sie ein Matlabskript `konvergenzRaten`, mit dem Sie die Konvergenzraten des Gradienten-Verfahrens und des cg-Verfahrens vergleichen können.

   Die Konvergenzrate eines Verfahrens im k-ten Schritt sei dabei definiert als $c^{(k)} = \frac{\|x^{(k)}-x^*\|}{\|x^{(k-1)}-x^*\|}$. x^* ist die exakte Lösung, die Sie mit dem Matlaboperator \ berechnen können. Als Norm können Sie die Euklidische Norm oder die Energie-Norm verwenden.

   Wählen Sie als Testbeispiel eine Tridiagonalmatrix `A` der Dimension `n`, die auf der Diagonalen jeweils den Wert 2 und auf den beiden Nebendiagonalen jeweils den Wert -1 hat. Mit den Matlabbefehlen `e = ones(n,1); A = spdiags([-e 2*e -e], -1:1, n,n)` können Sie eine solche Matrix erzeugen. Wählen Sie als rechte Seite `b = ones(n,1)` und als Startwert `x0 = zeros(n,1)`. Testen Sie für die Dimension `n = 100`, aber auch mit anderen Werten für `n`.

   Zeichnen Sie in ein Schaubild für jeden Iterationsschritt die Konvergenzrate des Gradienten-Verfahrens und in ein weiteres Schaubild die Konvergenzrate des cg-Verfahrens ein.

b) Erläutern Sie die Schaubilder. Erhalten Sie für unterschiedliche Werte von `n` qualitativ unterschiedliche Schaubilder?

c) Vergleichen Sie die Konvergenzraten der beiden Verfahren auch am Beispiel aus Aufgabe 19.

d) Erläutern Sie auch diese Schaubilder. Was passiert, wenn Sie a klein wählen, was, wenn a groß ist? Woran liegt das?

Hinweise:
Die Programmieraufgaben sind in Matlab zu erstellen. Senden Sie alle Files in einer E-mail mit dem Betreff **Loesung-Blatt05** an **angewandte.numerik@uni-ulm.de** (Abgabetermin jeweils wie beim Theorieteil). Drucken Sie zusätzlich allen Programmcode sowie die Ergebnisse aus und geben Sie diese vor der Übung ab. Der Source Code sollte strukturiert und, wenn nöbig, dokumentiert sein.