

Angewandte Numerik 2

Abgabetermin: Freitag, 12.12.2014, vor der Übung

Für dieses Übungsblatt gibt es 23 Theorie- und 14 Matlab-Punkte, sowie 5 Theorie- und 0 Matlab-Zusatzpunkte. Punkte, die mit einem * gekennzeichnet sind, sind Zusatzpunkte.

Die 50-Prozent-Grenzen liegen aktuell (inklusive Blatt 8) bei 70 Theoriepunkten und 78 Matlabpunkten.

Aufgabe 30 (*explizite Runge-Kutta-Verfahren*)

(4T+6T+3T+5T Punkte)

- a) Zeigen Sie, dass das Verfahren von Heun (zweiter Ordnung) aus Aufgabe 27 vom letzten Übungsblatt ein zweistufiges Runge-Kutta-Verfahren ist. Geben Sie die Funktionen $k_l(t, y)$, die Werte für die Parameter α_r , β_{rl} und γ_l sowie die Verfahrensfunktion $F(f, t, h, y)$ an. Stellen Sie dieses Verfahren durch ein Butcher-Tableau dar.
- b) Leiten Sie das Verfahren von Heun (dritter Ordnung) aus Beispiel 3.4.8 über den Ansatz auf Seite 79 des Skripts her. Geben Sie dazu die Funktionen $k_1(t, y)$, $k_2(t, y)$ und $k_3(t, y)$ sowie die Verfahrensfunktion F an. Welche Quadraturformeln werden bei $r = 2$ und $r = 3$ zur näherungsweisen Berechnung der $y(s_r)$ in $f(s_r, y(s_r)) \approx k_r(t, y)$ verwendet?
- c) Zeigen Sie mit Satz 3.4.5, dass
 - i) das Verfahren von Heun zweiter Ordnung genau die Konsistenzordnung 2 und
 - ii) das Verfahren von Heun dritter Ordnung genau die Konsistenzordnung 3hat.

Aufgabe 31 (*Programmieraufgabe: Auch Runge-Kutta-Verfahren sind Einschrittverfahren*)

(3M+2M+3M+2M+3T Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir den Vergleich verschiedener Einschritt-Verfahren aus Aufgabe 27 des letzten Übungsblattes um zwei Runge-Kutta-Verfahren erweitern.

- a) Schreiben Sie eine Matlabfunktion `yk = heun3(f, y0, tk)`, die für einen gegebenen Startwert $y^0 \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ der Anfangswertaufgabe

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y^0$$

mit dem Verfahren von Heun (dritter Ordnung) aus Beispiel 3.4.8 berechnet. Der Parameter \mathbf{f} ist dabei die Funktion f als *function handle*, y_0 ist der Startwert $y^0 \in \mathbb{R}^n$ und \mathbf{tk} ist ein Gitter mit den diskreten Zeitpunkten t_k . Der Rückgabewert `yk` ist der Vektor der einzelnen Näherungswerte y^k .

- b) Erweitern Sie Ihr Matlabskript `vergleichESV` zum Vergleich verschiedener Einschrittverfahren aus Aufgabe 27 des letzten Übungsblattes. Bestimmen Sie mit Ihrer Implementierung `heun3` des Verfahrens von Heun dritter Ordnung und den Schrittweiten $h = \frac{1}{20}$ und $h = \frac{1}{40}$ zwei weitere Näherungslösungen der Anfangswertaufgabe aus Aufgabe 27. Zeichnen Sie diese Näherungslösungen und die exakte Lösung in ein neues Schaubild ein, und ergänzen Sie Ihr Schaubild mit den Gitterfehlern um die Gitterfehler der beiden neuen Lösungen.
- c) Schreiben Sie eine Matlabfunktion `yk = rungeKutta4(f, y0, tk)`, die die Anfangswertaufgabe mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung aus Beispiel 3.4.7 löst.
- d) Bestimmen Sie auch mit `rungeKutta4` zwei Näherungslösungen der Anfangswertaufgabe und den Schrittweiten aus Aufgabenteil b), die Sie zusammen mit der exakten Lösung in ein neues Schaubild eintragen, und ergänzen Sie Ihr Schaubild mit den Gitterfehlern um die Gitterfehler der beiden neuen Lösungen.
- e) Erläutern Sie die beiden neuen Schaubilder und das erweiterte Schaubild der Gitterfehler.

Aufgabe 32 (*Programmieraufgabe: Konvergenzordnung verschiedener ESV*) (4M+2T Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir analog zu Aufgabe 28 die Diskretisierungsfehler der Verfahren vom letzten Übungsblatt und die Diskretisierungsfehler der beiden Runge-Kutta-Verfahren aus Aufgabe 31 für verschiedene Schrittweiten untersuchen.

- a) Erweitern Sie Ihr Matlabskript `konvergenzESV` aus Aufgabe 28, das für das Anfangswertproblem aus Aufgabe 27 und für die Schrittweiten $0.5^4, \dots, 0.5^{14}$ die Diskretisierungsfehler der vier Einschritt-Verfahren vom letzten Übungsblatt berechnet und doppelt logarithmisch über den Schrittweiten plottet (Matlabbefehl `loglog`). Untersuchen Sie auch das Verfahren von Heun dritter Ordnung und das klassische Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung und stellen Sie im Schaubild auch die Diskretisierungsfehler dieser beiden Runge-Kutta-Verfahren (`heun3` und `rungeKutta4`) dar.
- b) Interpretieren Sie das Schaubild.

Aufgabe 33 (*Wahr oder falsch?*) (5T* Punkte)

Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

- a) Wenn eine Verfahrensfunktion F eine Lipschitz-Bedingung erfüllt, dann kann man mit dem entsprechenden Einschrittverfahren jede Anfangswertaufgabe lösen, da der Diskretisierungsfehler klein bleibt.
- b) Bei jedem Einschritt-Verfahren kann man durch Verkleinerung der Schrittweite einen beliebig kleinen Diskretisierungsfehler erhalten.
- c) Jedes m -stufige Runge-Kutta-Verfahren hat die Ordnung m .
- d) Für jede gewünschte Konsistenzordnung m kann man ein m -stufiges Runge-Kutta-Verfahren mit dieser Ordnung konstruieren.
- e) Auch bei Runge-Kutta-Verfahren mit mehr als 3 Stufen gilt "Konsistenzordnung = Konvergenzordnung"

Hinweise:

Die Programmieraufgaben sind in Matlab zu erstellen. Senden Sie alle Files in einer E-mail mit dem Betreff **Loesung-Blatt08** an angewandte.numerik@uni-ulm.de (Abgabetermin jeweils wie beim Theorieteil). Drucken Sie zusätzlich allen Programmcode sowie die Ergebnisse aus und geben Sie diese vor der Übung ab. Der Source Code sollte strukturiert und, wenn nötig, dokumentiert sein.