Prof. Dr. Karsten Urban
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

WiSe 2014/2015
Blatt 9
12.12.2014

Angewandte Numerik 2

Abgabetermin: Freitag, 19.12.2014, **vor der Übung**

Für dieses Übungsblatt gibt es 7 Theorie- und 20 Matlab-Punkte, sowie 0 Theorie- und 7 Matlab-Zusatzpunkte. Punkte, die mit einem * gekennzeichnet sind, sind Zusatzpunkte.
Die 50-Prozent-Grenzen liegen aktuell (inklusive Blatt 9) bei 73,5 Theoriepunkten und 88 Matlabpunkten.

Aufgabe 34 *(Programmieraufgabe: Runge-Kutta-Verfahren mit Schrittweitensteuerung)*
(3T+2M+3M+2T+6M+3M+1T+6M+1T+4M*+3M* Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir das *restringierte Dreikörperproblem* betrachten, das die Bewegung von drei Körpern im Weltall unter dem Einfluss ihres gemeinsamen Gravitationsfeldes beschreibt.
Dabei gehen wir von vereinfachenden Annahmen aus: Zwei Massen m_1 (Erde) und m_2 (Mond) bewegen sich auf Kreisbahnen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt. Die dritte Masse m_3 (Satellit) sei im Verhältnis zu m_1 und m_2 so klein, dass sie die Kreisbewegungen der beiden Körper mit den Massen m_1 und m_2 nicht beeinflusst. Ausserdem verlaufe die Bewegung aller drei Massen in einer Ebene.
Mit μ bezeichnen wir die relative Mondmasse, also das Verhältnis der Mondmasse zur Gesamtmasse von Erde und Mond. $\hat{\mu}$ bezeichne analog die relative Erdmasse, also

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{und} \quad \hat{\mu} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} = 1 - \mu.$$

Mit obigen Vereinfachungen lässt sich die Bewegung der drei Himmelskörper in einem (y_1, y_2)-Koordinatensystem beschreiben. Dieses Koordinatensystem rotiere um den gemeinsamen Schwerpunkt von Erde und Mond, und zwar so, dass die beiden Himmelskörper Erde und Mond stets auf der y_1-Achse liegen. Bei geeigneter Längenskalierung befindet sich dann die Erde im festen Punkt $(-\mu, 0)$ und der Mond im festen Punkt $(1 - \mu, 0)$.
Die Bewegung des Satelliten lässt sich in diesem Koordinatensystem durch das folgende System von Differentialgleichungen beschreiben. Dabei bezeichne $(y_1(t), y_2(t))$ den Ort, an dem sich der Satellit zum Zeitpunkt t befindet.

$$\begin{aligned} {y_1}'' &= y_1 + 2\,{y_2}' - (1-\mu)\,\frac{y_1+\mu}{A} - \mu\,\frac{y_1-(1-\mu)}{B}, \\ {y_2}'' &= y_2 - 2\,{y_1}' - (1-\mu)\,\frac{y_2}{A} - \mu\,\frac{y_2}{B}. \end{aligned}$$

A und B sind gegeben durch

$$\begin{aligned} A &:= ((y_1+\mu)^2 + {y_2}^2)^{3/2}, \\ B &:= ((y_1-(1-\mu))^2 + {y_2}^2)^{3/2}. \end{aligned}$$

Mit den Anfangswerten (zum Zeitpunkt $t_0 = 0$)

$$y_1(0) = 0.994, \quad {y_1}'(0) = 0, \quad y_2(0) = 0 \quad \text{und} \quad {y_2}'(0) = -2.0015851063790825$$

ergibt sich für $\mu = 0.012277471$ als Lösung ein geschlossener sogenannter (vierblättrige) Arenstorf-Orbit mit einer Periode von $T = 17.0652165601579625588\!9$ (Monaten).

a) Transformieren Sie obiges System von Differentialgleichungen auf ein System erster Ordnung. Geben Sie auch die Anfangswerte im transformierten System an.

b) Schreiben Sie eine Matlabfunktion `dydt = f3KProblem(t, y, pMu)`, die $f(t, y)$ für das Dreikörperproblem zu einem Zeitpunkt `t` und einem Wert `y` berechnet. Der Parameter `pMu` gibt dabei die relative Mondmasse an.

c) Schreiben Sie ein Matlabskript `dreiKoerperProblem`, das das Dreikörperproblem mit den oben angegebenen Anfangswerten und dem oben angegebenen Parameter $\mu = 0.012277471$ löst. Verwenden Sie dazu Ihre Matlabunktion `yk = rungeKutta4(f, y0, tk)` aus Aufgabe 31 vom letzten Übungsblatt 8. Testen Sie mit unterschiedlichen (äquidistanten) Schrittweiten, insbesondere mit 0.1, 0.01 und 0.001. Stellen Sie die berechnete Bahn des Satelliten in der (y_1, y_2)-Ebene graphisch dar.
Hinweis zur Implementierung: Übergeben Sie an `rungeKutta4` eine anonyme Funktion `f = @(t,y)`, die Ihre Funktion `f3KProblem(t, y, pMu)` mit dem Parameter μ aufruft.

d) Was beobachten Sie bei unterschiedlichen Schrittweiten? Woran liegt das?

e) Schreiben Sie eine Matlabfunktion, die ein Anfangswertproblem mit dem eingebetteten Runge-Kutta-Verfahren 4(3) aus Beispiel 3.5.4 des Skripts löst. Verwenden Sie zur Schrittweitensteuerung den Algorithmus aus Abbildung 3.4 des Skripts. Überlegen Sie sich, welche Parameter Ihre Funktion benötigt und welche Werte sie zurück geben muss.

f) Erweitern Sie Ihr Matlabskript `dreiKoerperProblem` und lösen Sie das Dreikörperproblem auch mit Ihrer Matlabfunktion aus der letzten Teilaufgabe. Verwenden Sie für die Genauigkeit ϵ aus dem Algorithmus zur Schrittweitensteuerung den Wert 10^{-8} und geeignete Schranken für die Schrittweite. Geben Sie die Anzahl der benötigten Schritte sowie die minimale und die maximale verwendete Schrittweite aus. Stellen Sie wieder die berechnete Bahn des Satelliten in der (y_1, y_2)-Ebene graphisch dar und plotten Sie zusätzlich die verwendete Schrittweite über der Zeit.

g) Was beobachten Sie, wenn Sie die Genauigkeit verkleinern oder vergrößern?

h) Schreiben Sie analog zu Ihrer Matlabfunktion aus Teilaufgabe e) eine Matlabfunktion, die ein Anfangswertproblem mit dem Dormand-Prince-Verfahren DoPri 5(4) löst. Das Butcher-Tableau finden Sie in der angegebenen Literatur oder beispielsweise auch unter `https://www-user.tu-chemnitz.de/~benner/Lehre/NumerikODE/Folie_embRK.pdf`. Integrieren Sie analog zu Teilaufgabe f) auch diese Matlabfunktion in Ihr Matlabskript `dreiKoerperProblem`.

i) Was verändert sich gegenüber dem Verfahren aus Teilaufgabe e)?

j) Variieren Sie den Anfangswert für $y_2'(0) = -2.0015851063790825$ und testen Sie auch $y_2'(0) = -2.01$, $y_2'(0) = -2.02$, $y_2'(0) = -2.03$ und $y_2'(0) = -2.031732630$. Vergleichen Sie die Orbits.

k) Testen Sie Ihre Programme auch mit den folgenden Anfangswerten:

$$y_1(0) = 1.2, \quad y_1'(0) = 0, \quad y_2(0) = 0 \quad \text{und} \quad y_2'(0) = -1.049357510.$$

Damit erhalten Sie für $\mu = 1/82.45$ als Lösung eine periodische Bahn des Satelliten mit Periode $T = 6.192169331$.

Hinweise:
Die Programmieraufgaben sind in Matlab zu erstellen. Senden Sie alle Files in einer E-mail mit dem Betreff **Loesung-Blatt09** an **angewandte.numerik@uni-ulm.de** (Abgabetermin jeweils wie beim Theorieteil). Drucken Sie zusätzlich allen Programmcode sowie die Ergebnisse aus und geben Sie diese vor der Übung ab. Der Source Code sollte strukturiert und, wenn nötig, dokumentiert sein.