Prof. Dr. Karsten Urban
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

WiSe 2014/2015
Blatt 10
09.01.2015

Angewandte Numerik 2

Abgabetermin: Freitag, 16.01.2015, **vor der Übung**

Für dieses Übungsblatt gibt es 18 Theorie- und 9 Matlab-Punkte, sowie 9 Theorie- und 4 Matlab-Zusatzpunkte. Punkte, die mit einem * gekennzeichnet sind, sind Zusatzpunkte.
Die 50-Prozent-Grenzen liegen aktuell (inklusive Blatt 10) bei 82,5 Theoriepunkten und 92,5 Matlabpunkten.

Aufgabe 35 *(Programmieraufgabe: Steife Anfangswertaufgaben)* (3M+2M+2M+2M+4M* Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir das Anfangswertproblem

$$y' = \lambda\, y, \qquad y(0) = 1,$$

dessen exakte Lösung durch $y(t) = e^{\lambda t}$ gegeben ist. Dabei sind wir insbesondere am Abklingverhalten der Funktion y interessiert, also am Verhalten der Funktion y für große Werte von t.

a) Schreiben Sie ein Matlabskript `steif`, das Näherungslösungen dieses Anfangswertproblems für $\lambda = -20$ berechnet und visualisiert. Berechnen Sie die Näherungslösungen zunächst mit dem expliziten Euler-Verfahren im Intervall $[0, 1]$ und mit der Schrittweite $h_1 = 10^{-3}$. Sie können hierzu die Matlabfunktion `yk = eulerExplizit(f, y0, tk)` aus Aufgabe 27 verwenden. Plotten Sie Ihre Näherungslösung und die exakte Lösung gemeinsam in ein Schaubild.

b) Da Sie am Abklingverhalten der Funktion interessiert sind, vergrößern Sie nun die Schrittweite. Wählen Sie insbesondere $h_2 = 10^{-2}$ und $h_3 = 10^{-1}$. Plotten Sie auch hier jeweils die Näherungslösung und die exakte Lösung in ein Schaubild. Was stellen Sie fest? Woran liegt das?

c) Berechnen Sie nun die Näherungslösungen mit dem impliziten Euler-Verfahren. Sie können wieder die Matlabfunktion `yk = eulerImplizit(f, y0, tk, tol)` aus Aufgabe 27 verwenden. Wählen Sie zunächst die Schrittweiten $h_1 = 10^{-3}$ und $h_2 = 10^{-2}$ und plotten Sie wiederum die Lösungen.

d) Vergrößern Sie nun wieder die Schrittweite. Verwenden Sie insbesondere auch die Schrittweite $h_3 = 10^{-1}$. Erhalten Sie eine Näherungslösung? Falls nicht, woran liegt das?

e) Implementieren Sie das implizite Euler-Verfahren nun so, dass Sie auch für größere Schrittweiten, zumindest für $h_3 = 10^{-1}$ und $h_4 = 1$, eine Näherungslösung erhalten. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten (die Implementierung einer dieser Möglichkeiten genügt):

   i) Ihre Matlabfunktion `eulerImplizit` erhält als weiteren Parameter eine Funktion, mit der Sie einen „guten" Startwert für die Fixpunktiteration berechnen können. Diese Funktion müssen Sie dann im aufrufenden Matlabskript `steif` in Abhängigkeit vom konkreten Anfangswertproblem definieren.

   ii) Sie implementieren das implizite Euler-Verfahren speziell für das Anfangswertproblem aus dieser Aufgabe.

   Vergrößern Sie jetzt auch das Intervall, zumindest auf $[0, 5]$, und plotten Sie wiederum Ihre Lösungen. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

Aufgabe 36 *(Stabilität)* (6T+2T Punkte)

a) Berechnen Sie das Stabilitätsgebiet des aus der Trapezregel resultierenden impliziten Verfahrens nach Beispiel 3.2.3 (c) des Skripts (vgl. Aufgabe 27 Teil f)).

b) Ist dieses Verfahren A-stabil?

Hinweise:

i) Wenden Sie zunächst die Verfahrensvorschrift des aus der Trapezregel resultierenden Verfahrens auf das skalare Modellproblem $y' = \lambda y$, $y(0) = 1$ an.

ii) Bringen Sie die so erhaltene Gleichung auf die Form $y_h(t_{j+1}) = R(\lambda h)\, y_h(t_j)$.

iii) Berechnen Sie das Stabilitätsgebiet $S = \{z \in \mathbb{C} : |R(z)| \leq 1\}$.

Aufgabe 37 *(Mehrschrittverfahren, Konsistenzordnung, Konvergenz)* (7T+3T Punkte)

Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des Mehrschrittverfahrens

$$y_{j+4} - y_j = \frac{h}{3}(8f_{j+1} - 4f_{j+2} + 8f_{j+3})$$

und prüfen Sie, ob es konvergent ist.

Hinweise:

i) Zeigen Sie zunächst die Konsistenz und die Konsistenzordnung ($p = 4$) des linearen Mehrschrittverfahrens.

ii) Dazu können Sie Lemma 3.7.12 und Satz 3.7.13 aus dem Skript verwenden. Gehen Sie davon aus, dass die Startwerte („Anlaufstück") geeignet gewählt wurden.

iii) Zeigen Sie anschließend die Konvergenz.

Aufgabe 38 *(Konstruktion eines expliziten Zweischrittverfahrens)* (4T*+2T*+2T*+1T* Punkte)

Konstruieren Sie ein explizites Zweischrittverfahren der Form

$$y_{j+2} + \alpha_1 y_{j+1} + \alpha_0 y_j = h(\beta_0 f(t_j, y_j) + \beta_1 f(t_{j+1}, y_{j+1})).$$

a) Bestimmen Sie dazu zunächst α_0, β_0 und β_1 in Abhängikeit von α_1 so, dass das Verfahren mindestens die Ordnung 2 hat.

b) Für welche Werte von α_1 ist dieses Verfahren dann konvergent?

c) Lässt sich α_1 so wählen, dass sich ein Verfahren der Konsistenzordnung 3 ergibt?

d) Ist dieses Verfahren dann konvergent?

Hinweise:

Die Programmieraufgaben sind in Matlab zu erstellen. Senden Sie alle Files in einer E-mail mit dem Betreff **Loesung-Blatt10** an **angewandte.numerik@uni-ulm.de** (Abgabetermin jeweils wie beim Theorieteil). Drucken Sie zusätzlich allen Programmcode sowie die Ergebnisse aus und geben Sie diese vor der Übung ab. Der Source Code sollte strukturiert und, wenn nötig, dokumentiert sein.