Prof. Dr. Karsten Urban
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

WiSe 2014/2015
Blatt 13
30.01.2015

Angewandte Numerik 2

Abgabetermin: Freitag, 06.02.2015, **vor der Übung**

Für dieses Übungsblatt gibt es 19 Theorie- und 13 Matlab-Punkte, sowie 10 Theorie- und 4 Matlab-Zusatzpunkte. Punkte, die mit einem * gekennzeichnet sind, sind Zusatzpunkte.
Die 50-Prozent-Grenzen liegen aktuell (inklusive Blatt 13) bei 104,5 Theoriepunkten und 111 Matlabpunkten.

Raumänderung (Vorankündigung):
Am **06. Februar 2015** finden wegen der Promotionsfeier der Fakultät für Ingenieurwissenschaften und Informatik die Übungen zu Angewandte Numerik 2 im Raum 47.1.507 statt.

Seminar „Angewandte Numerik“:
Falls Sie am von Professor Urban angekündigten Seminar „Angewandte Numerik“ Interesse haben, senden Sie bitte schnellstmöglich, spätestens bis Freitag, 06. Februar 2015, eine Mail an Klaus Stolle.

Aufgabe 46 *(Programmieraufgabe: Finite-Differenzen-Methode mit variablen Koeffizienten)*
(4T+6T+3T+10M+3M+4M* Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir die Implementierung der Finite-Differenzen-Methode aus Aufgabe 45 verallgemeinern. Wir betrachten jetzt Randwertprobleme der Art

$$Lu(x) := -\big(\alpha(x)u'(x)\big)' + \beta(x)u'(x) + \gamma(x)u(x) = f(x), \quad x \in (a,b) \quad \text{mit } u(a) = d_a, u(b) = d_b. \tag{1}$$

Dabei seien $\alpha, \beta, \gamma \in C^0([a,b])$.
Zur Diskretisierung führen wir auf $[a,b]$ wieder ein äquidistantes Gitter

$$\Delta_h := \left\{ x_j \;\middle|\; x_j = a + jh;\ j = 0, \dots, m;\ h = \frac{b-a}{m} \right\}$$

ein und approximieren u durch $\{u_j\}_{j=0}^m$ mit $u_j \approx u(x_j)$ für $j = 0, \dots, m$.
Das resultierende Gleichungssystem habe die Form

$$A_h u_h = f_h \qquad \text{mit} \qquad u_h = (u_1, \dots, u_{m-1})^T.$$

Die Matrix $A_h = D_h + K_h + R_h \in \mathbb{R}^{(m-1)\times(m-1)}$ setzt sich dabei aus den Matrizen D_h, K_h und R_h zusammen, die wir aus den einzelnen Termen des Randwertproblems (1) erhalten.

a) Überlegen Sie sich, wie die aus dem Konvektionsterm $\beta(x)u'(x)$ resultierende Matrix K_h aussieht. Ersetzen Sie dazu die Ableitung u' an den Gitterpunkten durch den zentralen Differenzenquotienten

$$u'(x_j) \approx \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h}, \qquad j = 0, \dots, m.$$

Was ergibt sich durch den Konvektionsterm für die rechte Seite f_h des linearen Gleichungssystems?

b) Leiten Sie die aus dem Diffusionsterm $-(\alpha(x)u'(x))'$ resultierende Matrix D_h her. Führen Sie dazu ein verschobenes Gitter $x_{j+\frac{1}{2}} := \frac{1}{2}(x_j + x_{j+1}),\ j = 0, \dots, m-1$ ein und approximieren Sie den Fluss $\alpha(x_{j+\frac{1}{2}})u'(x_{j+\frac{1}{2}})$ an den Gitterstellen des verschobenen Gitters durch einen zentralen Differenzenquotienten mit Schrittweite $h/2$. Ersetzen Sie auch die äußere Ableitung $(\alpha(x_j)u'(x_j))'$ an den Gitterpunkten des ursprünglichen Gitters Δ_h durch einen zentralen Differenzenquotienten mit Schrittweite $h/2$. Was müssen Sie für die rechte Seite f_h des linearen Gleichungssystems beachten?

c) Geben Sie das komplette resultierende Gleichungssystem $A_h u_h = f_h$ mit $u_h = (u_1, \dots, u_{m-1})^T$ an.

d) Schreiben Sie eine Matlabfunktion `uj = fdmVar(f, alpha, beta, gamma, xj, da, db)`, die eine Lösung des Randwertproblems (1) mit der Finite-Differenzen-Methode näherungsweise berechnet. `f` ist dabei eine Funktion für die rechte Seite des Randwertproblems, `alpha`, `beta` und `gamma` sind die variablen Koeffizienten (als function handle), `xj` ist ein äquidistantes Gitter, `da0` und `db` sind die Werte auf dem Rand und `uj` ist die berechnete diskrete Näherungslösung. Das auftretende lineare Gleichungssystem dürfen Sie mit dem Matlaboperator \ lösen.

e) Schreiben Sie ein Matlabskript `testFdmVar`, das Ihre Matlabfunktion `uj = fdmVar(f, alpha, beta, gamma, xj, da, db)` mit den folgenden Randwertproblemen testet:

   i) $u'' + u = 0, \quad [a,b] = [0, \frac{\pi}{2}], \quad u(0) = 0, \quad u(\frac{\pi}{2}) = 1.$ (Die exakte Lösung ist $u(x) = sin(x)$.)
   Testen Sie Ihre Funktion `fdmVar` mit verschiedenen Schrittweiten.

   ii) $-\varepsilon u'' + u' = 0, \quad [a,b] = [0,1], \quad u(0) = 1, \quad u(1) = 0.$ (Die exakte Lösung ist $u_\varepsilon(x) = \frac{e^{\frac{1}{\varepsilon}} - e^{\frac{x}{\varepsilon}}}{e^{\frac{1}{\varepsilon}} - 1}$.)
   Testen Sie Ihre Funktion `fdmVar` mit den Schrittweiten $h_1 = 10^{-3}$, $h_2 = 10^{-2}$ und $h_3 = 10^{-1}$ sowie jeweils $\varepsilon \in \{1; 0.1; 0.01\}$. Was stellen Sie fest?

Aufgabe 47 *(Sobolev-Norm)* (5T* Punkte)

Zeigen Sie, dass durch

$$\|u\|_1 := \sqrt{\|u\|_{L_2}^2 + \|u'\|_{L_2}^2}$$

eine Norm auf $H_0^1(0,1)$ definiert wird.

Hinweis:

Sie können beispielsweise zeigen, dass durch $(u,v)_1 := (u,v)_{L_2} + (u',v')_{L_2}$ ein Skalarprodukt auf $H_0^1(0,1)$ definiert ist. Denn dann ist die durch das Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_1$ induzierte Norm $\|u\|_1 := \sqrt{(u,u)_1}$ eine Norm.

Aufgabe 48 *(Galerkin-Verfahren)* (3T+3T+5T* Punkte)

Wir betrachten in dieser Aufgabe die allgemeine Form linearer Randwertprobleme zweiter Ordnung in 1D

$$-\big(\alpha(x)u'(x)\big)' + \beta(x)u'(x) + \gamma(x)u(x) = f(x), \quad x \in (0,1) \quad \text{mit } u(0) = u(1) = 0.$$

Dabei seien $\alpha, \beta, \gamma \in C^0([0,1])$ und $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$.

Gesucht ist (schwache Formulierung) eine Funktion u aus dem Test- und Ansatzraum $V := H_0^1(0,1)$ mit

$$a(u,v) = (f,v), \qquad \forall v \in V, \tag{2}$$

mit der Bilinearform

$$a(u,v) := \int_0^1 \alpha(x)u'(x)v'(x)\,dx + \int_0^1 \beta(x)u'(x)v(x)\,dx + \int_0^1 \gamma(x)u(x)v(x)\,dx$$

und der Linearform

$$F(v) := (f,v) := \int_0^1 f(x)v(x)\,dx.$$

Zur Diskretisierung führen wir auf $[0,1]$ ein äquidistantes Gitter

$$\Delta_h := \left\{ x_i \;\middle|\; x_i = ih;\ i = 0,\dots,m;\ h = \frac{1}{m} \right\}$$

ein und betrachten die darauf definierten Hutfunktionen ($i = 1,\dots,m-1$)

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x_{i-1} \le x \le x_i \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}, & x_i < x \le x_{i+1} \\ 0, & sonst. \end{cases}$$

a) Die gesuchte Lösung u muss die Bedingung (2) für alle v erfüllen, also auch für die Hutfunktionen φ_i, $i = 1,\dots,m-1$. Setzen Sie die Hutfunktionen φ_i für v in (2) ein und geben Sie die daraus resultierenden $m-1$ Bedingungen an u in Integralform an. Berücksichtigen Sie dabei, dass die Hutfunktionen jeweils nur auf zwei Teilintervallen von 0 verschieden sind.

b) Nehmen Sie an, dass die Näherungslösung u_h der gesuchten Funktion u sich als Linearkombination der Hutfunktionen φ_i schreiben lässt, also

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{m-1} u_j \varphi_j(x).$$

Wie lauten jetzt die Bedingungen an u_h? Berücksichtigen Sie auch hier, dass die Hutfunktionen jeweils nur auf zwei Teilintervallen von 0 verschieden sind.

c) Betrachten Sie nun den Spezialfall $\alpha(x) = 1,\ \beta(x) = \gamma(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$.
Wie lauten die Bedingungen an u_h für diesen Spezialfall? Geben Sie diese als lineares Gleichungssystem

$$A_{(m-1)} u_{(m-1)} = f_{(m-1)} \qquad \text{mit} \qquad u_{(m-1)} = (u_1,\dots,u_{m-1})^T$$

an.

Hinweise:
Die Programmieraufgaben sind in Matlab zu erstellen. Senden Sie alle Files in einer E-mail mit dem Betreff **Loesung-Blatt13** an **angewandte.numerik@uni-ulm.de** (Abgabetermin jeweils wie beim Theorieteil). Drucken Sie zusätzlich allen Programmcode sowie die Ergebnisse aus und geben Sie diese vor der Übung ab. Der Source Code sollte strukturiert und, wenn nötig, dokumentiert sein.