Prof. Dr. Dirk Lebiedz
M.Sc. Pascal Heiter

Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik
Wintersemester 2014/2015

Numerische Optimierung - Übungsblatt 3

(Besprechung: Mittwoch, 5. November 2014)

Aufgabe 9 *(Konische Hülle)*

Betrachten Sie das Standardproblem

$$\begin{array}{lrcll} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & f(x) & & & \\ \text{s.t.} & g_i(x) & \leq & 0 & (i=1,...,k) \\ & g_i(x) & = & 0 & (i=k+1,...,m) \end{array}$$

Sei $K = \mathbb{R}^k_- \times \{0\}_{m-k}$ und $\bar{x} \in S$ mit $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \in K\}$. Zeigen Sie:

$$K(g(\bar{x})) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_i \leq 0 \text{ falls } i \in I(\bar{x}) \quad \text{und} \quad y_i = 0 \text{ falls } i = k+1,...,m\}$$

Aufgabe 10 *(Trennungssatz)*

Sei $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}^n$ ein konvexer und abgeschlossener Kegel und $y \notin K$. Zeigen Sie:

$$\exists\, \lambda \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \lambda y < 0 \leq \lambda x \qquad \forall\, x \in K.$$

Aufgabe 11 *(Tangentialkegel)*

Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ und $\bar{x} \in S$ Zeigen Sie:

$T(S, \bar{x})$ ist ein abgeschlossener Kegel.

Aufgabe 12 *(Tangentialkegel und konische Hülle)*

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $\bar{x} \in K$. Zeigen Sie:

$$T(K, \bar{x}) = \overline{K(\bar{x})}.$$

Also, dass der Tangentialkegel der Abschluss der konischen Hülle von K in $\bar{x}$ ist.

Aufgabe 13 *(Variationsungleichung)*

Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ und $\bar{x} \in S$ eine Minimalstelle des Problems

$$\min\{f(x) \ : \ x \in S\}.$$

Ferner sei f differenzierbar in $\bar{x}$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\nabla f(\bar{x})^T v \geq 0 \qquad \forall\, v \in T(S, \bar{x}).$$

Aufgabe 14 *(Konvexe Hülle von Extremalpunkten)*

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex. Zeigen Sie:

> K ist der Abschluss der konvexen Hülle ihrer Extremalpunkte.

Hinweis: Induktion über die Raumdimension, Trennungssatz und benutzen Sie das folgende Lemma.

> **Lemma**
> Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex und H eine Hyperebene mit folgenden Eigenschaften
>
> - $T := K \cap H \neq \emptyset$
> - K ist komplett in einer der beiden abgeschlossenen, durch H bestimmten, Halbräumen enthalten.
>
> Dann gilt:
>
> > Jeder Extremalpunkt von T ist auch Extremalpunkt von K.