Prof. Dr. Dirk Lebiedz
M.Sc. Pascal Heiter

Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik
Wintersemester 2014/2015

Numerische Optimierung - Übungsblatt 4

(Besprechung: Mittwoch, 12. November 2014)

Aufgabe 15 *(Linearisierende Kegel)*

Sei $S := \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, g(x) \in K\}$ mit $K \subset \mathbb{R}^m$ konvex und $\bar{x} \in S$. Zeigen Sie:

$$K(g(\bar{x})) \text{ ist abgeschlossen} \qquad \Rightarrow \qquad T(S,\bar{x}) \subset L(S,\bar{x}).$$

Aufgabe 16 *(Regulärer Punkt)*

Sei $S = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, g(x) = 0\}$ und $\bar{x} \in S$ regulär im Sinne von Definition 3.9. Zeigen Sie:

$$g'(\bar{x})g'(\bar{x})^T \text{ ist regulär.}$$

Aufgabe 17 *(Slater-CQ)*

Sei $S := \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \tilde{g}(x) \in K,\ h(x) = 0\}$, $\bar{x} \in S$ mit $K \subset \mathbb{R}^k$ konvex, $\mathring{K} \neq \emptyset$ und $\tilde{g} = (g_1, \ldots, g_k)$ sowie $h = (g_{k+1}, \ldots, g_m)$.

a) Zeigen Sie

$$\begin{aligned} & 0 \in \operatorname{int}(\operatorname{Im}(g'(\bar{x})) + g(\bar{x}) - (K \times \{0\}_{m-k})) \\ \Leftrightarrow\ & \operatorname{Im}(h'(\bar{x})) = \mathbb{R}^{m-k} \quad \text{d.h. } g_i'(\bar{x}), i = k+1, \ldots, m \text{ sind linear unabhängig und es gibt } v \in \mathbb{R}^m \text{ mit} \\ & \qquad h'(\bar{x})v = 0 \text{ und } \tilde{g}(\bar{x}) + \tilde{g}'(\bar{x})v \in \mathring{K}. \end{aligned}$$

b) Sei $K = \mathbb{R}^k_-$. Zeigen Sie

$$\begin{aligned} & \operatorname{Im}(h'(\bar{x})) = \mathbb{R}^{m-k} \quad \text{d.h. } g_i'(\bar{x}), i = k+1, \ldots, m \text{ sind linear unabhängig und es gibt } v \in \mathbb{R}^m \text{ mit} \\ & \qquad h'(\bar{x})v = 0 \text{ und } \tilde{g}(\bar{x}) + \tilde{g}'(\bar{x})v \in \mathring{K}. \\ \Leftrightarrow\ & \{g'_{k+1}(\bar{x}), ..., g'_m(\bar{x})\} \text{ sind linear unabhängig und es gibt ein } v \in \mathbb{R}^n \text{ mit } g_i'(\bar{x})v < 0 \quad \forall\, i \in I(\bar{x}) \\ & \qquad \text{und} \quad g_i'(\bar{x})v = 0, i = k+1, ..., m. \end{aligned}$$

Aufgabe 18 *(Satz 3.17)*

Sei $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ein regulärer Punkt der zulässigen Menge $S = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, g(x) \in K,\ h(x) = 0\}$, $K \subset \mathbb{R}^k$ konvex mit $\mathring{K} \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

(i) Zu $v_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $h'(x)v_0 = 0$ und $g(\bar{x}) + g'(\bar{x})v_0 \in \mathring{K}$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Kurve

$$x : [0,\varepsilon] \to S \qquad \text{mit } x(0) = \bar{x} \qquad \text{und} \qquad v_0 = \lim_{t \searrow 0} \frac{x(t) - \bar{x}}{t}.$$

(ii) $L(S,\bar{x}) \subset T(S,\bar{x})$.