Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Mladjan Radic, Stefan Hain
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik von PDE's
WiSe 2014/2015

Übungsblatt 12

Besprechung 04.02.2015

Aufgabe 1 (Lumping-Technik) (10 Punkte)

Wir betrachten die Anfangs-Randwertaufgabe

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + Lu &= f, && \text{in } (0,T)\times\Omega,\\ u &= 0, && \text{auf } (0,T)\times\partial\Omega,\\ u &= u_0(x), && \text{für } t=0 \text{ und } x\in\Omega,\end{aligned}$$

mit einem gleichmäßig elliptischen Differentialoperator L und einem polygonalen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Verwendet man die vertikale Linienmethode, so erhält man laut Vorlesung mit $a(u,v) := \langle Lu, v\rangle$ das folgende semidiskrete Problem:

Bestimme $u_h \in C^1(0,T;V_h)$, $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ mit

$$\begin{aligned} u_h(0) &= u_{0,h}\\ (u_h'(t), v_h)_{L_2} + a(u_h(t), v_h) &= (f(t), v_h)_{L_2}, \qquad v_h \in V_h,\end{aligned}$$

wobei $u_{0,h} \in V_h$ eine Approximation der Anfangsbedingung u_0 ist.

Ist $\{\varphi_1^h, \dots, \varphi_{\mathcal{N}_h}^h\}$ eine Basis in V_h, so führt die Darstellung

$$u_h(t,x) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_h} \alpha_i(t)\varphi_i^h(x) \in V_h$$

auf die Beziehung

$$\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_h} \alpha_i'(t)(\varphi_i^h, \varphi_j^h)_{L_2} + \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_h} \alpha_i(t) a(\varphi_i^h, \varphi_j^h) = (f(t), \varphi_j^h)_{L_2}, \qquad j = 1, \dots, \mathcal{N}_h.$$

Mit der Steifigkeitsmatrix $A_h = (a(\varphi_i^h, \varphi_j^h))_{i,j=1,\mathcal{N}_h} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}_h\times\mathcal{N}_h}$, der rechten Seite $b_h(t) = ((f(t), \varphi_j^h)_{L_2})_{j=1,\dots,\mathcal{N}_h} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}_h}$ und der Massematrix $M_h = ((\varphi_i^h, \varphi_j^h)_{L_2})_{i,j=1,\dots,\mathcal{N}_h} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}_h\times\mathcal{N}_h}$ lautet die Matrixdarstellung für $\hat\alpha := (\alpha_i)_{i=1,\dots,\mathcal{N}_h}$:

$$M_h\hat\alpha'(t) + A_h\hat\alpha(t) = b_h(t).$$

Man erhält demnach ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen der Größe $\mathcal{N}_h$. Offensichtlich wäre es von Vorteil, wenn M_h eine Diagonalmatrix wäre, da in diesem Fall das Differentialgleichungssystem entkoppelt ist. Dieses ist der Fall, wenn die Basisfunktionen bezüglich des L_2-Skalarproduktes orthogonal sind, wie es z.B. für das nichtkonforme Crouzeix-Raviart-Element der Fall ist. Auch einige in der letzten Zeit populär gewordene Wavelets genügen dieser Bedingung.
Eine weitere Methode ist die s.g. *Lumping*-Methode, die allerdings auf lineare Elemente beschränkt ist.

Formal macht man dabei nichts anderes, als M_h durch eine Diagonalmatrix D zu ersetzen, wobei man für die Diagonalelemente d_{jj} von D die Zeilensummen von M_h wählt, also

$$d_{jj} = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}_h} d_{jk}.$$

Zur theoretischen Fundierung dieses Vorgehens überlegt man sich zunächst, dass der Übergang von M_h zu D nichts anderes bedeutet, als dass man im Term $(\varphi_i^h, \varphi_j^h)_{L_2}$ das Integral nicht exakt auswertet, sondern die Quadraturformel

$$\int_T f\,dx \approx \frac{1}{3}\,|T|\,\sum_{j=1}^{3} f(P_{T_j})$$

benutzt. Hierbei bezeichnet P_{T_j} $(1 \leq j \leq 3)$ die drei Eckpunkte des Dreiecks T. Zur Abkürzung sei

$$(v,w)_h := \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \frac{1}{3}\,|T|\,\sum_{j=1}^{3} vw(P_{T_j}).$$

Offenbar gilt $(\varphi_i^h, \varphi_j^h)_h = 0$ für $i \neq j$, da das Produkt $\varphi_i^h \cdot \varphi_j^h$ in den Knoten stets verschwindet. Bezeichnen wir mit D_j die Vereinigung aller Dreiecke, die P_{T_j} als Ecke besitzen, so gilt anderseits

$$(\varphi_i^h, \varphi_j^h)_h = \frac{1}{3}|D_j|$$

und

$$\int_T \varphi_i^h\,\varphi_j^h\,dx = \frac{1}{12}|T| \qquad \text{sowie} \qquad \int_T (\varphi_j^h)^2\,dx = \frac{1}{6}|T|.$$

Damit ist $(\varphi_j^h, \varphi_j^h)_h = \sum_k (\varphi_j^h, \varphi_k^h)_{L_2}$, also stimmt es tatsächlich, dass der Quadraturformelzugang M_h wie angegeben diagonalisiert.

Damit kann die Lumping-Technik charakterisiert werden durch

$$(u_h'(t), v_h)_h + a(u_h(t), v_h) = (f(t), v_h)_{L_2}, \qquad \forall v_h \in V_h. \tag{1}$$

Wir wollen nun in Analogie zu Satz 6.2.3 eine Fehlerabschätzung für die Lumping-Technik beweisen. Zeigen Sie daher:

Sei $f \in L_2(0,\infty; H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$ und $u_0 \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ mit $\Delta u_0 \in H_0^1(\Omega)$. Sei $u_{0,h} \in C_h$ und u_h sei die Lösung von (1). Dann gilt für den Fehler der Semidiskretisierung mit linearen finiten Elementen und Lumping in der L_2-Norm

$$\|u(t) - u_h(t)\|_{L_2} \leq \|u_{0,h} - u_0\|_{L_2} + Ch^2 \left\{ \|u_0\|_2 + \left(\int_0^t \|u_t(s)\|_2^2\,ds \right)^{1/2} \right\}.$$

Hinweis: Sie dürfen folgende Resultate ohne Beweis verwenden:

- Auf V_h sind $(\cdot,\cdot)^{1/2}$ und $(\cdot,\cdot)_h^{1/2}$ äquivalente Normen. Ferner gilt
$$|(v,w)_h - (v,w)| \leq Ch^2\|\nabla v\|\cdot\|\nabla w\|, \qquad \text{für alle } v,w \in V_h.$$
- Für $v \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ gilt für die Ritz Projektion
$$\|\nabla(v - R_h v)\| \leq Ch\|v\|_2 \qquad \text{und} \qquad \|v - R_h v\| \leq Ch^2\|v\|_2.$$
- $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_h^2 = (u'(t), u(t))_h$. Die Idee des Beweises basiert auf folgendem Punkt:
$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_h^2 = \frac{d}{dt}(u(t),u(t))_h = (u'(t),u(t))_h + (u(t),u'(t))_h = 2(u'(t),u(t))_h.$$
- Die Youngsche-Ungleichung: Für $a,b \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ gilt:
$$|a\,b| \leq \varepsilon\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2\varepsilon}.$$

Aufgabe 2 (Stetiges und unstetiges Galerkin-Verfahren) (10 Punkte)

Wir haben gesehen, dass die Semidiskretisierung linearer parabolischer Anfangs-Randwertaufgaben auf eine Anfangswertaufgabe für ein Differentialgleichungssystem führt. Nun könnte man zur Lösung dieses Systems ein bereits bekanntes Verfahren zur Lösung von Anfangswertaufgaben einsetzen. Hierbei ist allerdings zu beachten, dass die entstehenden Systeme in der Regel sehr steif sind, weshalb unbedingt ein stabiles Verfahren gewählt werden sollte.

Andererseits ist man nicht zwingend darauf angewiesen Ein- oder Mehrschrittverfahren einzusetzen. So kann man das semidiskrete Problem auch mit Hilfe eines Galerkin-Verfahrens diskretisieren. Dazu sei im folgenden stets

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_M = T$$

eine Zerlegung des Zeitintervalls $[0, T]$ und $\tau_n = t_n - t_{n-1}$, $1 \le n \le M$, seien die entsprechenden Schrittweiten. Ferner sei $W_{h,t}$ der Raum der stückweisen Polynome in t über der gegebenen Zerlegung von Grade q mit Werten in V_h.

a) Zeigen Sie, dass cG(1) gerade dem Crank-Nicolson-Verfahren entspricht, d.h.

$$\frac{1}{\tau_m}(U^m - U^{m-1}, v_h) + \frac{1}{2}a(U^{m-1} + U^m, v_h) = \frac{1}{\tau_m}\int_{t_{m-1}}^{t_m} (f(t), v_h)_{L_2}\, dt, \qquad v_h \in V_h,$$

wobei $U \in W_{h,t}$ (für $q = 1$) stetig in t_m und $U^m := U(t_m)$.

b) Zeigen Sie, dass dG(0) einer Modifikation des impliziten Euler-Verfahrens für das semidiskretisierte Problem entspricht, d.h. dass

$$\frac{1}{\tau_m}(U_m - U_{m-1}, v_h) + a(U_m, v_h) = \frac{1}{\tau_m}\int_{t_{m-1}}^{t_m} (f(t), v_h)_{L_2}\, dt, \qquad v_h \in V_h,$$

wobei $U \in W_{h,t}$ (für $q = 0$, d.h. $U_m := U|_{(t_{m-1} - t_m}$.

c) Worin besteht der Unterschied zwischen dem eigentlichen impliziten Euler-Verfahren und dem Verfahren aus Teilaufgabe b)?

Wichtiger Hinweis

Bitte melden Sie sich über das Hochschuldienstportal zur Vorleistung der Veranstaltung “Numerik von partiellen Differentialgleichungen“ an!