Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Mladjan Radic, Stefan Hain
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik von PDE's
WiSe 2014/2015

Übungsblatt 2

Besprechung 29.10.2014.

Aufgabe 1 (Finite Differenzen Methode 1) (5 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet. Die in der Vorlesung entwickelte 5-Punkte-Stern-Diskretisierung lässt sich als eine Abbildung $-\Delta_h$ auffassen, die definiert ist durch

$$-\Delta_h u(x_1, x_2) := \sum_{i,j=-1}^{1} c_{ij} u_h(x_1 + ih, x_2 + jh), \tag{1}$$

wobei die Gewichte $c_{i,j}$ gegeben sind durch

- $c_{0,0} = 4/h^2$,
- $c_{0,1} = c_{1,0} = c_{0,-1} = c_{-1,0} = -1/h^2$ und
- $c_{ij} = 0$ für alle anderen (i, j).

Man zeige: Es gibt in (1) keine Wahl der Gewichte c_{ij}, so dass für eine beliebige glatte Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\|\Delta u - \Delta_h u\|_{h,\infty} \leq Ch^3$$

mit einer von h unabhängigen Konstanten C.

Aufgabe 2 (Finite Differenzen Methode 2) (5 Punkte)

Für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ist

$$D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

und $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Mit dieser Bezeichnung definieren wir für $u \in C^k(\overline{\Omega})$ die Halbnorm

$$|u|_{C^k(\overline{\Omega})} := \max_{|\alpha|=k} \max_{x \in \overline{\Omega}} |D^\alpha u(x)|.$$

Sei $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $n = 1$ oder $n = 2$. Sei $u \in C^3(\overline{\Omega})$. Man zeige: Es existiert eine von h unabhängige Konstante $C > 0$, so dass für $h > 0$ und $h_N, h_O, h_S, h_W \leq h$ klein genug, so dass die folgenden Abschätzungen gelten:

a) für $n = 1$:

$$\left| \frac{2}{h_O(h_O + h_W)} u_O - \frac{2}{h_O h_W} u_Z + \frac{2}{h_W(h_O + h_W)} u_W - u''(x) \right| \leq C|u|_{C^3(\overline{\Omega})} h,$$

wobei $u_Z := u(x)$, $u_W := u(x - h_W)$ und $u_O := u(x + h_O)$.

b) für $n = 2$:

$$\Bigg| \frac{2}{h_O(h_O + h_W)} u_O + \frac{2}{h_W(h_O + h_W)} u_W + \frac{2}{h_S(h_S + h_N)} u_S + \frac{2}{h_N(h_S + h_N)} u_N - \left(\frac{2}{h_O h_W} + \frac{2}{h_S h_N} \right) u_Z - \Delta u(x) \Bigg| \leq C |u|_{C^3(\overline{\Omega})} h,$$

wobei $u_Z := u(x)$, $u_W := u(x - h_W)$, $u_O := u(x + h_O)$, $u_N := u(x - h_N)$ und $h_S := u(x + h_S)$.

Aufgabe 3 (Finite Differenzen Methode 3) (10 Punkte)

Wir betrachten die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung, d.h.

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, && \text{in } (0,T) \times (0,1), \\ u(t,0) = u(t,1) &= 0, && \text{für } t \in [0,T], \\ u(0,x) &= u_0(x), && \text{für } x \in [0,1], \end{aligned} \tag{2}$$

mit $u_0 \in C([0,1])$ und $u_0(0) = u_0(1) = 0$.

Für die Anwendung der FDM betrachten wir der Einfachheit halber äquidistante Gitter für Raum und Zeit mit den Gitterweiten

$$\Delta t = \frac{T}{N}, \quad \Delta x = \frac{1}{M}, \quad M, N \in \mathbb{N}.$$

Mit Hilfe der FMD bestimmen wir nun Approximationen

$$U_i^k \approx u(t^k, x_i), \quad t^k := k\Delta t, \quad x_i := i\Delta x, \qquad k = 0, \ldots, N,\ i = 0, \ldots, M,$$

der exakten Lösung u von (2). Für die Diskretisierung von (2) führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned} D_{\Delta t}^+ v(t,x) &:= \frac{1}{\Delta t}(v(t + \Delta t, x) - v(t,x)), \\ D_{\Delta t}^- v(t,x) &:= \frac{1}{\Delta t}(v(t,x) - v(t - \Delta t, x)), \\ D_{\Delta x}^2 v(t,x) &:= \frac{1}{(\Delta x)^2}(v(t, x + \Delta x) - 2v(t,x) + v(t, x - \Delta x)). \end{aligned}$$

Verwendet man nun $D_{\Delta t}^+$ zur Diskretisierung der Zeitableitung u_t in (2) gelangt man zum *expliziten* Euler-Verfahren:

$$\begin{aligned} D_{\Delta t}^+ U_i^k &= D_{\Delta x}^2 U_i^k, && 0 < i < M,\ 0 \leq k < N, \\ U_0^k = U_M^k &= 0, && 0 \leq k \leq N, \\ U_i^0 &= u_0(x_i), && 0 \leq i \leq M. \end{aligned} \tag{3}$$

Verwendet man hingegen $D_{\Delta t}^-$, so gelangt man zum *impliziten* Euler-Verfahren:

$$\begin{aligned} D_{\Delta t}^- U_i^{k+1} &= D_{\Delta x}^2 U_i^{k+1}, && 0 < i < M,\ 0 \leq k < N, \\ U_0^k = U_M^k &= 0, && 0 \leq k \leq N, \\ U_i^0 &= u_0(x_i), && 0 \leq i \leq M. \end{aligned} \tag{4}$$

Aufgabe:

a) Implementieren Sie sowohl das explizite- als auch das implizite Euler-Verfahren für $T = 1$. Verwenden Sie beide Verfahren für $N = 100$, $M = 2, 3, \ldots, 20$ und $U_i^0 = (-1)^i \sin(i\Delta x\pi)$, $0 \leq i \leq M$, und vergleichen Sie die Lösungen. Was stellen Sie fest?

b) Variieren Sie N und M derart, dass sie einen geeigneten Konvergenzplot erhalten. Verwenden Sie dabei das *implizite* Euler-Verfahren für $U_i^0 = \frac{1}{\pi^2} \sin(\pi \cdot i\Delta x)$.

Hinweis: Die exakte Lösung lautet: $u(t,x) = \frac{1}{\pi^2} e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)$.