Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Mladjan Radic, Stefan Hain
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik von PDE's
WiSe 2014/2015

Übungsblatt 3

Besprechung 05.11.2014.

Aufgabe 1 (Poincaré-Friedrichs-Ungleichung) (10 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ in einem Würfel der Kantenlänge $s \in \mathbb{R}^+$ enthalten.

1. Beweisen Sie die Poincaré-Friedrichs-Ungleichung:

$$\|v\|_0 \leq s|v|_1 \qquad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega).$$

2. Zeigen Sie, dass $|\cdot|_m$ und $\|\cdot\|_m$ äquivalente Normen in $H_0^m(\Omega)$ sind, bzw. genauer, dass

$$|v|_m \leq \|v\|_m \leq (1+s)^m |v|_m, \qquad v \in H_0^m(\Omega).$$

Aufgabe 2 (Der Spuroperator tr) (5 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitzrand $\Gamma := \partial\Omega$. Zeigen Sie, dass für den Spuroperator

$$tr : H^1(\Omega) \to L_2(\Gamma)$$

gilt: Ist $u \in H_0^1(\Omega)$, so ist $tr(u) = 0$.

Aufgabe 3 (Variationsformulierung) (5 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand $\partial\Omega$. Geben Sie für die Helmholtz-Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u + au &= f \quad \text{in} \quad \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \end{aligned}$$

und hinreichend glattes f die Variationsformulierung und einen geeigneten Raum der Testfunktionen an. Zeigen Sie weiterhin, dass eine eindeutige schwache Lösung existiert.

Aufgabe 4 (Dimension der Menge der affinen Fkt. auf einem Dreieck) (5 Punkte)

Es sei $T \subset \mathbb{R}^2$ ein offenes Dreieck und E die Menge der affinen Funktionen von $\overline{T}$ nach $\mathbb{R}$, d.h.

$$E := \{v : T \to \mathbb{R} : \exists a, b, c \in \mathbb{R} \text{ mit } v(x) = a + bx_1 + cx_2,\ x = (x_1, x_2) \in \overline{T}\}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\dim E = 3.$$

Aufgabe 5 (Galerkin-Verfahren) **(5 Punkte)**

Es sei $(H, (\cdot,\cdot))$ ein Hilbert-Raum, $V \hookrightarrow H$ ein stetig eingebetteter weiterer Hilbert-Raum und $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine *stetige* (zunächst nicht zwangsläufig symmetrische) Bilinearform. Wir betrachten zu gegebenem $f \in H$ das Variationsproblem:

$$\text{Gesucht } u \in V \quad \text{mit} \quad a(u,v) = (f,v) \quad \text{für alle } v \in V.$$

Weiterhin betrachten wir das in der Vorlesung vorgestellte Galerkin-Verfahren:

$$\text{Gesucht } u_h \in V_h \quad \text{mit} \quad a(u_h,\chi) = (f,\chi) \quad \text{für alle } \chi \in V_h \subset V.$$

Im Beweis des *Céa-Lemmas* wurde gezeigt, dass der Fehler

$$e = u - u_h (\in V)$$

die wichtige Gleichung

$$a(e,\chi) = a(u - u_h, \chi) = 0 \quad \text{für alle } \chi \in V_h \tag{1}$$

erfüllt (die s.g. **Galerkin-Orthogonalität**). Ist die Bilinearform nun zusätzlich *symmetrisch* und *koerziv*, so definiert die Bilinearform ein Skalarprodukt, d.h. der Fehler e steht bzgl. dieses Skalarproduktes orthogonal auf dem Vektorraum V_h. Durch (1) wird das Element $u_h \in V_h$ charakterisiert, welches bezüglich der von der Bilinearform erzeugten Norm $\|\cdot\|_a := \sqrt{a(u,u)}$ den kleinsten Abstand zu $u \in V$ hat. Zeigen Sie daher:

Sei $V_h \subset V$ ein Teilraum, $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine stetige, symmetrische und koerzive Bilinearform. Dann gilt für $u_h \in V_h$:

$$a(u - u_h, \chi) = 0 \quad \text{für alle } \chi \in V_h \quad \Leftrightarrow \quad \|u - u_h\|_a = \min_{\chi \in V_h} \|u - \chi\|_a.$$

Hierbei bezeichne $\|\cdot\|_a := \sqrt{a(u,u)}$ die von der Bilinearform erzeugte Norm.