Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Mladjan Radic, Stefan Hain
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik von PDE's
WiSe 2014/2015

Übungsblatt 4

Besprechung 12.11.2014.

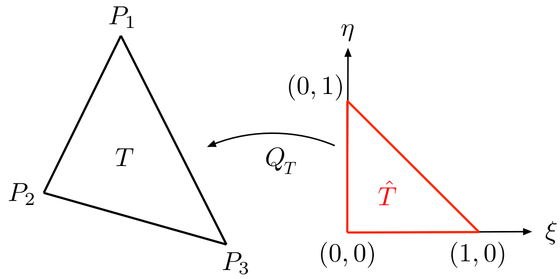
Aufgabe 1 (Transformation auf Referenzelement) (8 Punkte)

Bei der Finiten Elemente Methode (FEM) wird das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit einer Triangulierung $\mathcal{T}_h$ diskretisiert. Für

$$T := \operatorname{conv}\{P_1, P_2, P_3\} \in \mathcal{T}_h,$$

definieren wir die affine Abbildung Q_T, die das Referenzelement auf das Dreieck T abbildet, durch

$$Q_T : \hat{T} \to T$$



mit $Q_T(0,0) = P_1$, $Q_T(1,0) = P_2$ und $Q_T(0,1) = P_3$ (die Abbildung Q_T ist dadurch eindeutig bestimmt).
Außerdem definieren wir die Basis-Funktionen $\hat{\varphi}_i$ auf dem Referenzelement $\hat{T}$ durch

$$\hat{\varphi}_1(\eta,\xi) := 1 - \xi - \eta$$
$$\hat{\varphi}_2(\eta,\xi) := \xi$$
$$\hat{\varphi}_3(\eta,\xi) := \eta$$

und die Basisfunktionen φ_i auf dem Dreieck T durch $\varphi_i := (\hat{\varphi}_i \circ Q_T^{-1})$ $(i = 1,2,3)$. Es gilt also $\varphi_i(P_j) = \delta_{ij}$.
Berechnen Sie die folgenden Einträge für $i, j = 1,2,3$:

(*i*) $\displaystyle\int_T \varphi_i(x,y)\varphi_j(x,y)\, d(x,y)$

(*ii*) $\displaystyle\int_T \nabla\varphi_i(x,y)^T \nabla\varphi_j(x,y)\, d(x,y)$

(*iii*) $\displaystyle\int_T \frac{\partial}{\partial x}\varphi_i(x,y) d(x,y)$ und $\displaystyle\int_T \frac{\partial}{\partial y}\varphi_i(x,y) d(x,y)$

(*iv*) $\displaystyle\int_T \varphi_i(x,y) d(x,y)$

Sie können in dieser Aufgabe die Integrale entweder direkt berechnen oder die Transformation auf das Referenzelement verwenden.

Aufgabe 2 (Induzierte Bilinearform) (6 Punkte)

Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ induziert auf kanonische Weise eine Bilinearform

$$a : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto x^T A y.$$

(a) Wann erfüllt a die Voraussetzungen des Satzes von Lax-Milgram für $\mathbb{R}^d$ versehen mit der euklidischen Norm $|\cdot|$ und was bedeutet das, falls die Matrix A symmetrisch ist?

(b) Man zeige die Äquivalenz folgender Aussagen (hierbei muss A nicht notwendigerweise symmetrisch sein):

(i) A ist regulär.

(ii) $\beta := \inf\limits_{x \in \mathbb{R}^d} \sup\limits_{y \in \mathbb{R}^d} \frac{a(x,y)}{|x||y|} > 0$.

(iii) Zu jedem $b \in \mathbb{R}^d$ gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}^d$ mit $a(x,y) = b^T y$ für alle $y \in \mathbb{R}^d$.

(c) Ist a symmetrisch und positiv, so gilt $\beta = \alpha := \inf\limits_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{a(x,x)}{|x|^2}$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Sei $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < 1\}$ mit $d \geq 3$ und $u \in C^1(\Omega \setminus \{0\})$ derart, dass $\int_{0<|x|<1} |u(x)|^2 dx < \infty$ und $\int_{0<|x|<1} |\nabla u(x)|^2 dx < \infty$. Zeigen Sie, dass $u \in H^1(\Omega)$ und $(D_j u)(x) = \frac{\partial x}{\partial x_j}(x)$ für $x \neq 0$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Sei $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < 1\}$, $u(x) = |x|^{2\alpha}$. Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass die Funktion u in $H^1(\Omega)$ liegt. Verwenden Sie hierzu Aufgabe 3 und folgenden Satz:

Satz (Zwiebelintegration)

Sei $S^{d-1} := \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$ und bezeichne σ das Oberflächenmaß der Sphäre S^{d-1}. Sei weiter $0 < R_1 < R_2 \leq \infty$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d : R_1 < |x| < R_2\}$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine stetige radiale Funktion, d.h. $f(x) = f(|x|)$ für alle $x \in \Omega$. Dann ist f integrierbar genau dann, wenn $\int_{R_1}^{R_2} |f(r)| r^{d-1} dr < \infty$. In dem Fall gilt weiter

$$\int_\Omega f(x)dx = \sigma(S^{d-1}) \int_{R_1}^{R_2} f(r) r^{d-1} dr.$$

Aufgabe 5 (Regularität) (3 Punkte)

(i) Betrachte $-\Delta u = f$ in Ω, $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Angenommen $f \in L_2(\Omega)$, dann gilt $-\Delta u \in L_2(\Omega)$. Zeigen Sie, dass sogar $u \in H^2$ gilt.

(ii) Sei $u \in L_p(\Omega)$, $1 < p \leq \infty$ und angenommen, es existiert ein $C > 0$, so dass für jedes $\Omega' \subset \Omega$ mit Ω' kompakt, $h < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ gilt:

$$(D_k^h u)(x) := \frac{1}{h}\left(u(x + he_k) - u(x)\right) \in L_p(\Omega'), \qquad \|D_k^h u\|_{L_p(\Omega')} \leq C.$$

Zeigen Sie, dass dann $\partial_k u \in L_p(\Omega)$ mit $\|D_k^h u\|_{L_p(\Omega)} \leq C$ gilt.