Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Mladjan Radic, Stefan Hain
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik von PDE's
WiSe 2014/2015

Übungsblatt 9

Besprechung 17.12.2014

Aufgabe 1 (Nichtkonforme Methoden) (5 Punkte)

Bei der Diskretisierung mittels konformer finiter Elemente wird davon ausgegangen, dass dem kontinuirlichen Problem, z.B. der Form

$$a(u, v) = f(v), \qquad \text{für alle } v \in V, \tag{1}$$

durch Wahl eines geeigneten Unterraumes $V_h \subset V$ unter Beibehaltung von $a(\cdot,\cdot)$ und $f(\cdot)$ ein endlichdimensionales Problem

$$a(u_h, \varphi) = f(\varphi), \qquad \text{für alle } \varphi \in V_h, \tag{2}$$

zugeordnet wird. Diese Art der Diskretisierung kann sich jedoch als ungeeignet erweisen, falls:

- die Wahl eines Funktionenraumes $V_h \subset V$ zu kompliziert ist (z.B. bei Differentialgleichungen höherer Ordnung, wie es beispielsweise auf Blatt 6 bei der Plattengleichung der Fall war);
- die Bestimmung der Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ und des linearen Funktionals $f(\cdot)$ nur näherungsweise, etwa durch eine Quadraturformel möglich ist;
- inhomogene wesentliche Randbedingungen oder krummlinige Ränder des Grundgebietes Ω keine exakte Darstellung der Randbedingung im diskreten Problem erlauben.

Finite-Elemente-Verfahren, die nicht auf der direkten Diskretisierung von (1) durch (2) mit $V_h \subset V$ beruhen, werden *nichtkonforme Methoden* genannt. Wir wollen nun ein konkretes Beispiel für eine nichtkonforme Methode betrachten, bei der sich auch das 2. Lemma von Strang anwenden lässt, um die Analysis dahinter besser verstehen zu können.

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein polyedrisches Grundgebiet. Als Ausgangsproblem sei

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, \qquad && \text{in } \Omega, \\ u &= 0, && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

gegeben und das Problem besitze eine Lösung $u \in H^2(\Omega)$. Wir zerlegen das Grundgebiet Ω mit Hilfe einer zulässigen, quasi-uniformen Dreieckszerlegung $\mathcal{T}_h = \{T_i\}_{i=1}^M$.
Mit $p^j \in \Omega$, $j = 1, \dots, N$ bezeichnen wir diejenigen Mittelpunkte der Seiten der Dreiecke T_i der Zerlegung, die im Innern des Grundgebietes liegen und mit $p^j \in \partial\Omega$, $j = N+1, \dots, \overline{N}$, die Mittelpunkte auf dem Rand. Wir betrachten die Menge aller stückweise linearen Funktionen, bei denen die Funktionswerte in den Mittelpunkten der Seiten von T_i, $i = 1, \dots, M$ vorgegeben sind und bei denen man die Stetigkeit an den Seiten-Mittelpunkten fordert, d.h. genauer:

$$\mathcal{M}_*^1 := \{v \in L_2(\Omega) : v|_T \in \mathcal{P}_1(T),\ T \in \mathcal{T}_h,\ , v \text{ ist stetig in } p^j,\ j = 1, \dots, N\}.$$

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen erhalten wir den Finite-Elemente-Raum V_h, der in unserem Beispiel definiert ist als

$$V_h := \mathcal{M}_{*,0}^1 = \{v \in \mathcal{M}_*^1 : v(p^j) = 0 \text{ für } j = N+1, \dots, \overline{N}\}.$$

Das so definierte $\mathcal{P}_1$-Element heißt *Crouzeix-Raviart-Element*. Offenbar impliziert $v_h \in V_h$ nicht, dass v_h auf $\partial\Omega$ verschwindet, also $V_h \not\subseteq H_0^1(\Omega)$. Es liegt demnach eine nichtkonforme Methode vor. Wir definieren ein diskretes Skalarprodukt mit induzierter Norm wie folgt:

$$a_h(u_h, v_h) := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx, \qquad u_h, v_h \in H^1(\Omega) \oplus \mathcal{M}_*^1,$$

$$\|u_h\|_h := \sqrt{a_h(u_h, u_h)}, \qquad u_h \in H^1(\Omega) \oplus \mathcal{M}_*^1.$$

a) Zeigen Sie, dass für den Konsistenzfehler mit dem Crouzeix-Raviart-Element die foltende Abschätzung gilt:

$$|f_h(v_h) - a_h(u, u_h)| \leq c\, h\, |u|_2\, \|v_h\|_h.$$

b) Zeigen Sie, dass für den Approximationsfehler mit dem Crouzeix-Raviart-Element die folgende Abschätzung gilt:

$$\|u - u_h\|_h \leq c\, h\, \|u\|_2.$$

Aufgabe 2 (Poisson-Gleichung als Sattelpunktproblem) (5 Punkte)

Betrachten Sie das Poisson-Problem auf einem Gebiet Ω,

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \qquad \text{und} \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Dieses Problem kann mit Hilfe einer zusätzlichen Variablen als System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung geschrieben werden und dann in ein Sattelpunktproblem umgewandelt werden. Zeigen Sie, dass dieses Sattelpunktproblem eindeutig lösbar ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Beweisen Sie Lemma 6.2.5 aus der Vorlesung:

Sei $v \in H^1(\Omega)$ mit $\Delta v \in L_2(\Omega)$. Dann existiert ein $\partial_n v \in L_2(\partial\Omega)$ und es gilt

$$\|\partial_n v\|_{0,\partial\Omega} \leq c_\Omega \{\|\Delta v\|_{0,\Omega} + \|\nabla v\|_{0,\Omega}\}$$

mit einer Konstanten c_Ω.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Beweisen Sie Lemma 6.3.1 aus der Vorlesung:

Sei $v \in H^1(\Omega)$ mit $\Delta v \in L_2(\Omega)$. Dann gilt

$$\|\partial_n v\|_{0,\partial T}^2 \leq c\{h_T |v|_{2,T}^2 + h_T^{-3} \|v\|_{0,T}^2\}.$$

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Beweisen Sie die Abschätzung (4) von Satz 6.3.2 aus der Vorlesung:

Sei $\mathcal{T}_h$ quasi-uniform. Dann gilt

$$\|e_h\|_0 \leq \eta_{L_2}(u_h) := c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^4 \, \{\rho_T(u_h)^2 + \rho_{\partial T}(u_h)^2\} \right)^{1/2} \tag{3}$$

sowie

$$\eta_{L_2} u_h \leq c\|e_h\|_0 + c \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^4 \, \|f\|_{0,T}^2 \right)^{1/2}. \tag{4}$$