Prof. Dr. Stefan Funken
M.Sc. Andreas Bantle
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle

Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik
Wintersemester 2014/2015

Numerische Lineare Algebra - Theorie-Blatt 6
Lösung

(Abgabe am 21.01.2015 **vor** der Übung!)

Hinweise

Die Hinweise zur Abgabe der Übungsblätter finden Sie auf dem ersten Übungsblatt!

Aufgabe 13 *(Richardson Verfahren)* (15 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix und sei $b \in \mathbb{R}^n$.

(i) $e_k := x_k - x$ bezeichne den Fehlervektor nach der k-ten Iteration des Richardson Verfahrens

$$x_{k+1} = x_k - \omega(Ax_k - b).$$

Zeigen Sie, dass die folgende Fehlerabschätzung gilt:

$$\|e_k\|_2 \leq \varrho(I - \omega A)^k \|e_0\|_2.$$

Hierbei bezeichnet $\varrho(B)$ den Spektralradius der Matrix B.

(ii) Falls alle Eigenwerte λ_i, $i = 1, ..., n$, von A die Ungleichungen $0 < c \leq \lambda_i \leq C$ erfüllen, wie ist dann der Parameter ω zu wählen, damit die Richardson Iteration möglichst schnell (im Sinne der euklidischen Norm) gegen die Lösung von $Ax = b$ konvergiert? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

(iii) Führen Sie für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

zwei Schritte des Richardson-Verfahrens mit optimalem Parameter ω aus (ω muss berechnet werden). Falls Sie Aufgabe (ii) nicht bearbeitet haben, verwenden Sie $\omega = 0.4$. Wählen Sie als Startvektor den Vektor $(0, 0, 0)^T$.

Lösung:

(i) Es gilt

$$\begin{aligned} e_k &= x_k - x = x_{k-1} - \omega(Ax_{k-1} - b) - x \\ &= x_{k-1} - \omega(Ax_{k-1} - Ax) - x = x_{k-1} - x - \omega A(x_{k-1} - x) = e_{k-1}(I - \omega A). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$||e_k||_2 = ||e_{k-1}(I - \omega A)||_2 \leq ||(I - \omega A)||_2 ||e_k||_2 \leq \ldots \leq ||(I - \omega A)||_2^k ||e_0||_2.$$

Weil A symmetrisch ist, ist auch $I - \omega A$ symmetrisch und es gilt $||(I - \omega A)||_2 = \rho(I - \omega A)$, wobei $\rho(B)$ der Spektralradius von B ist. (In Aufgabe 11 (i) haben wir gezeigt, dass gilt $\|C\|^2 = \rho(C^T C)$. Für C symm. gilt also $\|C\|^2 = \rho(C^2) = \rho(C)^2$.) Also erhalten wir

$$||e_k||_2 \leq \rho(I - \omega A)^k ||e_0||_2.$$

(Man sieht, dass das Verfahren genau dann konvergiert, wenn der Spektralradius von $I - \omega A$ kleiner als 1 ist.)

(ii) Wir führen eine Hauptachsentransformation der Matrix A durch und erhalten eine Matrix U mit $U^TU = I$ und $U^TAU = D = diag(\lambda_1 \dots \lambda_n)$, wobei die λ_i die Eigenwerte von A sind. Damit gilt

$$||I - \omega A||_2 = ||U^T(I - \omega A)U||_2 = ||I - \omega D||_2 = \max\{|1 - \omega\lambda_1|, \dots, |1 - \omega\lambda_1|\}$$

($(I - \omega D)$ ist symmetrisch).
Weiter gilt

$$1 - \omega C \leq 1 - \omega\lambda_k \leq 1 - \omega c \quad \Rightarrow \quad |1 - \omega\lambda_k| \leq \max\{|1 - \omega c|, |1 - \omega C|\}.$$

Nun muss ω so gewählt werden, dass $\max\{|1 - \omega c|, |1 - \omega C|\}$ minimal wird. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$1 - \omega c = -(1 - \omega C) \iff \omega = \frac{2}{c + C}.$$

(iii) Die Eigenwerte von A sind 1, 3 und 4 (berechnen!). Damit ergibt sich der optimale Dämpfungsparameter zu $\omega = \frac{2}{5}$. Also gilt

$$B := I - \omega A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -4 & 7 & -2 \\ -4 & 8 & -3 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \omega b = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$x_1 = Bx_0 + \omega b = (\frac{6}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{4}{5})^T$$
$$x_2 = Bx_1 + \omega b = (0.64,\ 0.64,\ 0.64)^T.$$

Aufgabe 14 (Jacobi Verfahren, LaTeX) (10 Punkte)

(i) Zeigen Sie: Konvergiert das Jacobi-Verfahren für ein Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix A für jeden Startvektor, so konvergiert es auch für jedes Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix A^T.

(ii) Führen Sie von Hand zwei Schritte des Jacobi-Verfahrens für das LGS

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$$

und den Startwert $x_0 = (0\ 0\ 0)^T$ durch.

Lösung

(i) Für das Jacobi-Verfahren zu $Ax = b$ mit $A = L + D + R$ als Standardzerlegung gilt

$$x - x_k = (-D^{-1}(L + R))^k(x - x_0)\,,$$

das heißt, es konvergiert genau dann für alle Startvektoren, wenn $\lim_{k\to\infty}(-D^{-1}(L + R))^k = 0$. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Spektralradius von $-D^{-1}(L+R)$ kleiner als 1 ist. Analog konvergiert das Jacobi-Verfahren zu $A^Ty = b'$ genau dann, wenn $\varrho(-D^{-1}(R^T + L^T)) < 1$. Es genügt also

$$\varrho(-D^{-1}(R^T + L^T)) = \varrho(-D^{-1}(L + R))$$

zu zeigen. Durch

$$\begin{aligned} \det(-D^{-1}(R^T + L^T) - \lambda I) &= \det(D^{-1}(-(R^T + L^T) - \lambda D)) \\ &= \det(D^{-1}) \cdot \det((-(R^T + L^T) - \lambda D)^T) \\ &= \det(D^{-1}) \cdot \det(-(L + R) - \lambda D) \\ &= \det(-D^{-1}(L + R) - \lambda I) \end{aligned}$$

sind die Eigenwerte und damit auch die oberen Spektralradien gleich.

(ii) Es gilt

$$B := -D^{-1}(L + R) = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/4 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich

$$x_1 = Bx_0 + D^{-1}b = (7/3,\ 5/2,\ 3)^T$$
$$x_2 = Bx_1 + D^{-1}b = (3/2,\ 7/12,\ 22/12)^T.$$

Aufgabe 15 (Gauss Seidel Method) (15 Punkte)

(i) Show that the Gauß-Seidel iteration converges for all systems of linear equations with a symmetric and positive definite coefficient matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Hint: Show first that for $A = L + D + R$ the equation

$$(1-\lambda)v^T Dv = (1+\lambda)v^T Av$$

holds for every eigenvalue λ of $-(L+D)^{-1}R$ with associated eigenvector $v \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Perform two steps of the Gauss-Seidel Method for the linear system from Exercise 14 (ii). Do not calculate any inverse matrices and show all your work.

(i) Aus $-(L+D)^{-1}Rv = \lambda v$ folgt $Rv = -\lambda(L+D)v$. Man erhält durch Multiplizieren von v^T von links und wegen $v^T Lv = v^T L^T v = v^T Rv$ die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} v^T Rv &= -\lambda v^T (L+D)v\,, \\ v^T Lv &= -\lambda v^T (R+D)v\,. \end{aligned}$$

Addiert man beide Gleichungen, so folgt

$$v^T Av - v^T Dv = v^T (L+R)v = -\lambda v^T Av - \lambda v^T Dv$$

und schließlich die Gleichung $(1+\lambda)v^T Av = (1-\lambda)v^T Dv$. Wäre nun $\lambda \geq 1$, so wäre die linke Seite der Gleichung positiv, die rechte Seite aber nicht. Analog würde für $\lambda \leq -1$ die rechte Seite positiv sein, die linke aber nicht. Folglich sind alle Eigenwerte und damit auch der Spektralradius von $-(L+D)^{-1}R$ kleiner 1. Das Gauß-Seidel-Verfahren konvergiert.

(ii) Es gilt

$$B := (L+D) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Um x_k zu berechnen lösen wir das Gleichungssystem

$$Bx_k = b - Rx_{x-1}$$

durch Vorwärtseinsetzen. Damit gilt (Rechnungen!)

$$\begin{aligned} x_1 &= (7/3,\ 4/3,\ 22/12)^T \\ x_2 &= (1.89,\ 1.10,\ 2.06)^T. \end{aligned}$$