Prof. Dr. Karsten Urban
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

WiSe 2015/2016
Blatt 12
22.01.2016

Angewandte Numerik 2

Abgabetermin: Freitag, 29.01.2016, **vor der Übung**

Für dieses Übungsblatt gibt es 14 Theorie- und 9 Matlab-Punkte, sowie 8 Theorie- und 17 Matlab-Zusatzpunkte. Punkte, die mit einem * gekennzeichnet sind, sind Zusatzpunkte.
Die 50-Prozent-Grenzen liegen aktuell (inklusive Blatt 12) bei 92,5 Theoriepunkten und 105,5 Matlabpunkten.

Aufgabe 42 *(Programmieraufgabe: Adams-Bashforth-Verfahren)* (5M*+2M*+3M* Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir untersuchen, wie sich das zur Berechnung der Näherungswerte des Anlaufstücks verwendete Einschrittverfahren auf die Konvergenzordnung bei Mehrschrittverfahren auswirkt. Dazu werden wir das Adams-Bashforth-Verfahren

$$y^{j+4} - y^{j+3} = \frac{h}{24}\big(55f(t_{j+3}, y^{j+3}) - 59f(t_{j+2}, y^{j+2}) + 37f(t_{j+1}, y^{j+1}) - 9f(t_j, yj)\big)$$

und zur Berechnung der Startwerte im Anlaufstück

i) das explizite Euler-Verfahren,

ii) das Verfahren von Heun,

iii) das klassische Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung und

iv) die exakten Werte

verwenden. Sie können Ihre Matlabfunktion `[yk, tk] = explLinMehrSchritt(f, y0, t0, tEnd, N, a, b, anlauf)` aus Aufgabe 41 vom letzten Übungsblatt mit den entsprechenden Parametern aufrufen.

a) Betrachten Sie zunächst die Anfangswertaufgabe aus Aufgabe 41 vom letzten Übungsblatt

$$y' = y, \quad y(0) = 1$$

und berechnen Sie im Intervall $[t_0, t_{End}] = [0, 1]$ die Diskretisierungsfehler jeweils zu den Schrittweiten 1/20, 1/40, 1/80 bis 1/5120 und den Varianten i) bis iv) für das Anlaufstück.

Plotten Sie in ein Schaubild für die vier Anlaufstück-Varianten jeweils die Diskretisierungsfehler über den Schrittweiten. Was beobachten Sie hinsichtlich der Konvergenzordnung?

b) Untersuchen Sie, ebenfalls im Intervall $[t_0, t_{End}] = [0, 1]$, auch die Konvergenzordnungen für die Anfangswertaufgabe

$$y'(t) = -2ty(t)^2, \qquad y(0) = 1,$$

deren exakte Lösung durch $y(t) = \frac{1}{t^2+1}$ gegeben ist.

c) Testen Sie Ihre Implementierung auch am folgenden System

$$\begin{aligned} y_1' &= && y_2 && -y_3, \\ y_2' &= -2y_1 && +3y_2 && -y_3, \\ y_3' &= -y_1 && +y_2 && +y_3 \end{aligned}$$

mit der Anfangsbedingung $y_1(0) = 1, y_2(0) = -1, y_3(0) = 2$, dessen exakte Lösung gegeben ist durch

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^t && -4te^t, && \\ y_2(t) &= e^t && -4te^t && -2e^{2t}, \\ y_3(t) &= 4e^t && && -2e^{2t}. \end{aligned}$$

Aufgabe 43 *(Grenzen des Schießverfahrens)* (5T+3T+4T Punkte)

Zur Lösung des Randwertproblems (RWP)

$$y''(t) = 100y(t), \qquad y(0) = 1, \qquad y(3) = e^{-30}, \tag{1}$$

mittels des einfachen Schießverfahrens betrachtet man die Anfangswertaufgabe (AWA)

$$y''(t) = 100y(t), \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = s. \tag{2}$$

a) Bestimmen Sie die Lösung $y(t;s)$ der Anfangswertaufgabe (2) und finden Sie $\hat{s}$, so dass $y(3;\hat{s}) = e^{-30}$. Wie lautet dann die Lösung $y(t) = y(t;\hat{s})$ des Randwertproblems (1)?
Hinweis:
Wählen Sie den Lösungsansatz $y(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ und berechnen Sie die Lösungen λ_1 und λ_2 der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 - 100 = 0$. Für die Lösung $y(t)$ der Anfangswertaufgabe (2) gilt nun $y(t;s) = c_1(s)\, e^{\lambda_1 t} + c_2(s)\, e^{\lambda_2 t}$, wobei Sie $c_1(s)$ und $c_2(s)$ aus den Anfangswerten bestimmen können.

b) Wie lautet die gestörte Lösung $y(3;(1+\varepsilon)\,\hat{s})$?

c) Ist ein einfaches Schießverfahren zur Lösung des obigen Randwertproblems geeignet? Begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis:
Berechnen Sie zur Beantwortung dieser Frage den relativen Fehler $\left|\frac{y(3;\hat{s}) - y(3;(1+\varepsilon)\,\hat{s})}{y(3;\hat{s})}\right|$.

Aufgabe 44 *(Programmieraufgabe: Schießverfahren)* (6M+3M+2T+5M*+2M* Punkte)

a) Implementieren Sie das einfache Schießverfahren zur Lösung des Randwertproblems

$$y''(x) = f(x, y, y'), \qquad y(a) = \alpha, \qquad y(b) = \beta,$$

in einer Matlabfunktion. Bestimmen Sie den Parameter $\hat{s}$ mit einem Quasi-Newton-Verfahren. Wählen Sie einen geeigneten Startwert für s. Zur Lösung der Anfangwertaufgabe können Sie ein geeignetes Verfahren aus früheren Aufgaben verwenden.

Überlegen Sie sich, welche Parameter Ihre Matlabfunktion braucht und welche Werte sie an den Aufrufer zurück geben sollte.

b) Testen Sie Ihr Matlabprogramm für die Randwertprobleme

i) $y''(t) = 4(y(t) - t), \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = 2$ und
ii) $y''(t) = y'(t) + 2y(t) + \cos(t), \qquad y(0) = -\frac{3}{10}, \qquad y(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{10}$.

Veranschaulichen Sie Ihre Ergebnisse graphisch.
Hinweis:
Die exakten Lösungen der obigen Randwertprobleme sind gegeben durch

i) $y(t) = t + \frac{1}{e^2-e^{-2}} e^{2t} - \frac{1}{e^2-e^{-2}} e^{-2t}$ und
ii) $y(t) = -\frac{3}{10}\cos(t) - \frac{1}{10}\sin(t)$.

c) Wie verläuft die gefundene Näherungslösung im Vergleich zur exakten Lösung. Wo, also zu welchen Zeitpunkten $t \in [t_0, t_{End}]$, ist die Abweichung zwischen der gefundenen Näherungslösung und der exakten Lösung am kleinsten, wo ist sie am größten?

d) Untersuchen Sie, welchen Einfluss unterschiedliche Verfahren zur Lösung der Anfangswertaufgabe auf das Gesamtergebnis haben. Betrachten Sie insbesondere das explizite Euler-Verfahren und das Verfahren von Heun sowie das klassische Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung. Wie wirken sich unterschiedliche Schrittweiten aus? Stellen Sie Ihre Untersuchungsergebnisse analog zu Aufgabe 42 graphisch dar.

e) Wie wirkt sich ein anderer Startwert für s aus? Verändern Sie den Startwert auch deutlich.

Aufgabe 45 *(Wahr oder falsch?)* (8T* Punkte)

Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Jedes Randwertproblem hat eine Lösung.

b) Jedes Randwertproblem hat eine eindeutige Lösung.

c) Ob ein Randwertproblem eine Lösung besitzt, kann von den Randbedingungen abhängen.

d) Beim einfachen Schieß-Verfahren wird ein Verfahren zur Lösung einer Anfangswertaufgabe eingesetzt.

e) Mit diesem Verfahren müssen in der Regel mehrere Näherungslösungen berechnet werden.

f) Das (Quasi-) Newtonverfahren ist immer das Verfahren der Wahl um das beim einfachen Schieß-Verfahren auftretende Nullstellen-Problem zu lösen.

g) Das Einfach-Schieß-Verfahren kann leichter parallelisiert werden als das Mehrfach-Schieß-Verfahren, da beim Einfach-Schieß-Verfahren keine Stetigkeitsbedingungen auftreten, die bei der Parallelisierung gesondert berücksichtigt werden müssen.

h) Die Idee der Schieß-Verfahren kann leicht auf raum-artige Randwertprobleme übertragen werden.

Hinweise:
Die Programmieraufgaben sind in Matlab zu erstellen. Senden Sie alle Matlab-Files in einer E-mail mit dem Betreff **Loesung-Blatt12** an **angewandte.numerik@uni-ulm.de** (Abgabetermin jeweils wie beim Theorieteil). Drucken Sie zusätzlich allen Programmcode sowie die Ergebnisse aus und geben Sie diese vor der Übung ab. Der Source Code sollte strukturiert und, wenn nötig, dokumentiert sein.