Prof. Dr. Karsten Urban
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

WiSe 2015/2016
Blatt 13
29.01.2016

Angewandte Numerik 2

Abgabetermin: Freitag, 05.02.2016, **vor der Übung/Vorlesung**

Für dieses Übungsblatt gibt es 21 Theorie- und 11 Matlab-Punkte, sowie 17 Theorie- und 6 Matlab-Zusatzpunkte. Punkte, die mit einem * gekennzeichnet sind, sind Zusatzpunkte.
Die 50-Prozent-Grenzen liegen aktuell (inklusive Blatt 13) bei 103 Theoriepunkten und 111 Matlabpunkten.

Tausch von Vorlesungstermin und Übungstermin mit Raumänderung:
Am **05. Februar 2016** findet statt der Übungen eine Vorlesung in der Helmholtzstraße 22, Raum 2.02 statt (Der Raum 43.2.104 wird für die Promotionsfeier der Fakultät für Ingenieurwissenschaften und Informatik benötigt). Zum Ausgleich wird es in der letzten Vorlesungswoche zwei Übungen geben: Am Mittwoch, 10.02.2016 um 8 Uhr im H12 und am Freitag, 12.02.2016 um 12 Uhr im gewohnten Raum 43.2.104.

Bitte für weitere Informationen die Homepage beachten!

Aufgabe 46 *(Finite-Differenzen-Methode)* (4T+4T+2T*+4T* Punkte)

Wir betrachten das Randwertproblem mit homogenen Randbedingungen

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in (0,1) \qquad \text{mit} \qquad u(0) = u(1) = 0. \tag{1}$$

Zur Lösung mit der Finite-Differenzen-Methode führen wir auf $[0,1]$ ein äquidistantes Gitter

$$\Delta_h := \left\{ x_j \;\middle|\; x_j = jh;\ j = 0, \ldots, m;\ h = \frac{1}{m} \right\}$$

ein und approximieren u durch $\{u_j\}_{j=0}^m$ mit $u_j \approx u(x_j)$ für $j = 0, \ldots, m$.
Ersetzen wir nun die zweite Ableitung u'' an den Gitterpunkten x_j durch den zentralen Differenzenquotienten

$$u''(x_j) \approx \frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{h^2}, \qquad j = 0, \ldots, m,$$

so erhalten wir ein lineares Gleichungssystem der Form

$$A^{(m)} u^{(m)} = f^{(m)} \qquad \text{mit} \qquad u^{(m)} = (u_1, \ldots, u_{m-1})^T. \tag{2}$$

a) Geben Sie die Matrix $A^{(m)}$ und den Vektor $f^{(m)}$ explizit an.

b) Betrachten wir nun das Randwertproblem mit den allgemeineren Randbedingungen $u(0) = \alpha_0$ und $u(1) = \alpha_1$. Wie muss die rechte Seite $f^{(m)}$ des linearen Gleichungssystems (2) angepasst werden?

c) Erweitern Sie den Lösungsvektor $u^{(m)}$ um die Lösung u_0 und u_m auf dem Rand. Wie lauten dann die Matrix $\tilde{A}^{(m)}$ und der Vektor $\tilde{f}^{(m)}$ des erweiterten linearen Gleichungssystems

$$\tilde{A}^{(m)} \tilde{u}^{(m)} = \tilde{f}^{(m)} \qquad \text{mit} \qquad \tilde{u}^{(m)} = (u_0, \ldots, u_m)^T?$$

d) Nun soll für eine Funktion $s : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto s(x)$ das Randwertproblem

$$-u''(x) + s(x)u(x) = f(x) \qquad \text{mit} \qquad u(0) = \alpha_0,\ u(1) = \alpha_1 \tag{3}$$

betrachtet werden. Geben Sie auch für dieses Randwertproblem die Matrix $\hat{A}^{(m)}$ und den Vektor $\hat{f}^{(m)}$ des resultierenden linearen Gleichungssystems $\hat{A}^{(m)}\hat{u}^{(m)} = \hat{f}^{(m)}$ mit $\hat{u}^{(m)} = (u_1, \ldots, u_{m-1})^T$ an.

Aufgabe 47 *(Die Finite-Differenzen-Methode und Polynome)* (3T+2T+1T*+3T* Punkte)

Betrachten Sie ein beliebiges Polynom p dritten Grades, also

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad \text{mit } a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}.$$

Sei $h > 0$ und $\Delta_h := \left\{x_j \;\middle|\; x_j = jh;\ j = 0, \ldots, m;\ h = \frac{1}{m}\right\}$ ein Gitter.

a) Berechnen Sie den zentralen Differenzenquotienten

$$\frac{p(x_{j-1}) - 2p(x_j) + p(x_{j+1})}{h^2} = -(L_hp)(x_j), \qquad j = 1, \ldots, m-1.$$

b) Sei nun ein Randwertproblem gegeben, dessen Lösung u ein Polynom dritten Grades ist. Wie groß ist der lokale Abbruchfehler, wenn Sie eine Näherungslösung des Randwertproblems mit der Finite-Differenzen-Methode berechnen? Hängt der lokale Abbruchfehler von der Gitterweite ab?

c) Haben Sie diesen lokalen Abbruchfehler erwartet? Begründen Sie Ihre Aussage!

d) Betrachten Sie jetzt ein Randwertproblem, dessen Lösung u durch ein Polynom vierten Grades gegeben ist. Können Sie eine obere Schranke für den lokalen Abbruchfehler angeben? Überprüfen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 48 *(Programmieraufgabe: Finite-Differenzen-Methode)*

(3M+3M+3M+(2M+2T)+2M*+4M* Punkte)

a) Schreiben Sie eine Matlabfunktion `uj = fdm(f, xj)`, die eine Lösung des Randwertproblems (1) mit der Finite-Differenzen-Methode näherungsweise berechnet. `f` ist dabei eine Funktion für die rechte Seite des Randwertproblems, `xj` ein äquidistantes Gitter und `uj` die berechnete diskrete Näherungslösung. Das auftretende lineare Gleichungssystem dürfen Sie mit dem Matlaboperator \ lösen.

b) Schreiben Sie ein Matlabskript `testFdm`, das Ihre Matlabfunktion `uj = fdm(f, xj)` mit der Funktion $f(x) = 1$ und den Schrittweiten $h = 2^{-1}, \ldots, 2^{-8}$ testet. Plotten Sie für jede Schrittweite die Näherungslösung und die exakte Lösung $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{2}$ in ein Schaubild.

c) Erweitern Sie Ihr Matlabskript `testFdm` und berechnen Sie auch den lokalen Abbruchfehler $\tau_h(x_j)$. Welchen Wert hat der lokale Abbruchfehler im Beispiel aus Aufgabenteil b)? Erklären Sie Ihre Beobachtung. Berücksichtigen Sie dabei auch das Ergebnis der Aufgabe 47 und die Konsistenzordnung der Finite-Differenzen-Methode.

d) Testen Sie Ihre Matlabfunktion `uj = fdm(f, xj)` auch mit der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{5}{12}$ und den Schrittweiten aus Aufgabenteil b). Die exakte Lösung ist $u(x) = -\frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{24}x^2$. Wie groß ist der lokale Abbruchfehler jetzt? Passt Ihr numerisches Ergebnis zu Ihren theoretischen Überlegungen aus Aufgabe 47?

e) Plotten Sie die maximalen lokalen Abbruchfehler doppelt logarithmisch über der Anzahl der Elemente im Gitter. Welche Konsistenzordnung der Finiten-Differenzen-Methode ergibt sich aus Ihren numerischen Experimenten?

f) Erweitern Sie nun Ihre Matlabfunktion `fdm` zu `uj = fdmAllgemein(f, alpha0, alpha1, xj, s)` und Ihr Matlabskript `testFdm`, so dass Sie auch Lösungen des allgemeineren Randwertproblems (3) aus Aufgabe 46 d) berechnen können. Testen Sie Ihre Funktion (exakte Lösung jeweils $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$) mit

i) $u(0) = 1, \quad u(1) = \frac{3}{2}, \quad s(x) = 0, \quad f(x) = 1$ und

ii) $u(0) = 1, \quad u(1) = \frac{3}{2}, \quad s(x) = \frac{1}{x}, \quad f(x) = -\frac{x}{2} + 2 + \frac{1}{x}$.

Aufgabe 49 *(Galerkin-Verfahren)* (3T+3T+5T*+2T* Punkte)

Wir betrachten in dieser Aufgabe die allgemeine Form linearer Randwertprobleme zweiter Ordnung in 1D

$$-\big(\alpha(x)u'(x)\big)' + \beta(x)u'(x) + \gamma(x)u(x) = f(x), \quad x \in (0,1) \quad \text{mit } u(0) = u(1) = 0.$$

Dabei seien $\alpha, \beta, \gamma \in C^0([0,1])$ und $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$.

Gesucht ist (schwache Formulierung) eine Funktion u aus dem Test- und Ansatzraum $V := H_0^1(0,1)$ mit

$$a(u,v) = (f,v), \qquad \forall v \in V, \tag{4}$$

mit der Bilinearform

$$a(u,v) := \int_0^1 \alpha(x)u'(x)v'(x)\,dx + \int_0^1 \beta(x)u'(x)v(x)\,dx + \int_0^1 \gamma(x)u(x)v(x)\,dx$$

und der Linearform

$$F(v) := (f,v) := \int_0^1 f(x)v(x)\,dx.$$

Zur Diskretisierung führen wir auf $[0,1]$ ein äquidistantes Gitter

$$\Delta_h := \left\{ x_i \;\middle|\; x_i = ih;\ i = 0,\ldots,m;\ h = \frac{1}{m} \right\}$$

ein und betrachten die darauf definierten Hutfunktionen ($i = 1,\ldots,m-1$)

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x_i < x \leq x_{i+1} \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

a) Die gesuchte Lösung u muss die Bedingung (4) für alle v erfüllen, also auch für die Hutfunktionen φ_i, $i = 1,\ldots,m-1$. Setzen Sie die Hutfunktionen φ_i für v in (4) ein und geben Sie die daraus resultierenden $m-1$ Bedingungen an u in Integralform an. Berücksichtigen Sie dabei, dass die Hutfunktionen jeweils nur auf zwei Teilintervallen von 0 verschieden sind.

b) Nehmen Sie an, dass die Näherungslösung u_h der gesuchten Funktion u sich als Linearkombination der Hutfunktionen φ_i schreiben lässt, also

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{m-1} u_j \varphi_j(x).$$

Wie lauten jetzt die Bedingungen an u_h? Berücksichtigen Sie auch hier, dass die Hutfunktionen jeweils nur auf zwei Teilintervallen von 0 verschieden sind.

c) Betrachten Sie nun den Spezialfall $\alpha(x) = 1,\ \beta(x) = \gamma(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$.
Wie lauten die Bedingungen an u_h für diesen Spezialfall? Geben Sie diese als lineares Gleichungssystem

$$A_{(m-1)}u_{(m-1)} = f_{(m-1)} \qquad \text{mit} \qquad u_{(m-1)} = (u_1,\ldots,u_{m-1})^T$$

an.

d) Vergleichen Sie dieses lineare Gleichungssystem mit dem linearen Gleichungssystem, das Sie in Aufgabe 46 für die Finite-Differenzen-Methode erhalten haben.

Hinweise:
Die Programmieraufgaben sind in Matlab zu erstellen. Senden Sie alle Matlab-Files in einer E-mail mit dem Betreff **Loesung-Blatt13** an **angewandte.numerik@uni-ulm.de** (Abgabetermin jeweils wie beim Theorieteil). Drucken Sie zusätzlich allen Programmcode sowie die Ergebnisse aus und geben Sie diese vor der Übung ab. Der Source Code sollte strukturiert und, wenn nötig, dokumentiert sein.