Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Florian Kunstmann
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerische Optimierung
WiSe 2015/2016

Übungsblatt 1

Besprechung voraussichtlich 21.10.2015.

Hinweise:

a) Im SLC zur Veranstaltung "Numerische Optimierung (Numerik III)" bis Dienstag, 19.10.2015, 23:59 Uhr anmelden.

b) Zulassungskriterien für die Prüfung:

- 70% der Aufgabenpunkte müssen mit Ankreuzen erreicht werden und zum Teil vorgerechnet werden.
- Matlab-Aufgaben zu **zweit** abgeben und zum Teil in der Übung vorstellen.

c) Die Abgabe der Lösungen der Matlab-Aufgaben erfolgt per Email (bis 18 Uhr am Vortag der Besprechung!) an

florian.kunstmann@uni-ulm.de.

Der Betreff sollte lauten "Num3Blatt$x$" (wobei x für die Nummer des Blattes steht). Die Lösungen müssen als **Anhang** an die Email versendet werden. Für jede Programmieraufgabe ist ein zip-file "AufgabeMy" zu erstellen (wobei y für die Nummer der Aufgabe steht), das die nötigen .m-files enthält.

Aufgabe 1 (Gauß-Newton) (5 Punkte)

Das Ausgleichsproblem

$$g(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{4} f_i(x)^2 \to \min$$

mit

$$f_i(x) = e^{x_1 + t_i x_2} - y_i \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{c|cccc} t_i & -2 & -1 & 0 & 1 \\ \hline y_i & 0.5 & 1 & 2 & 4 \end{array}.$$

hat die Lösung $x^* = \begin{pmatrix} \log 2 \\ \log 2 \end{pmatrix}$ mit $g(x^*) = 0$. Rechnen Sie einen Schritt des Gauß-Newton-Verfahrens (mit Schrittweite 1). Verwenden Sie dabei $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Startpunkt.

Aufgabe 2 (Verfahren von Hebden) (2+3+3 Punkte)

Zur Lösung rationaler nichtlinearer Gleichungen der Form

$$r(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^2}{(d_i + x)^2} = \rho, \qquad \rho, z_i, d_i > 0 \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n, \tag{$*$}$$

mit $d_1 > d_2 > \cdots > d_n$ gibt es folgende Variante des Newton-Verfahrens: Sei $r(0) > \rho$. Man wende das Newton-Verfahren auf die Nullstellengleichung

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{r(x)}} - \frac{1}{\sqrt{\rho}} = 0$$

an.

(i) Bestimmen Sie die Iterierten des so erhaltenen Verfahrens.

(ii) Zeigen Sie, dass das Verfahren für den Startwert $x_0 = 0$ gegen die Lösung der Gleichung ($*$) konvergiert.

(iii) Zeigen Sie, dass die Iterierte x_{k+1} des Verfahrens die Gleichung

$$h(x) := \frac{\zeta}{(\delta + x)^2} = \rho$$

löst, wobei ζ und δ so gewählt sind, dass sich h und r im Punkt x_k berühren, d.h.

$$h(x_k) = r(x_k), \quad h'(x_k) = r'(x_k).$$

Hinweis: Ist $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ differenzierbar, streng monoton wachsend und konkav mit eindeutiger Nullstelle $\hat{x} \in I$, so konvergiert das Newton-Verfahren $\forall x_0 \in I$ mit $x_0 \leq \hat{x}$ monoton gegen $\hat{x}$.

Aufgabe 3 („Zeit der Rekorde schon bald vorbei[1]“(?)) (5 Punkte)

"Weltrekorde in den Laufdisziplinen könnte es schon in wenigen Jahren nicht mehr geben, glauben britische Forscher. Ihre Analyse der Bestzeiten seit 1910 ergab, dass die Ära der Rekorde früher endet als bisher vermutet - und in einzelnen Disziplinen bereits beendet ist. [...] Alan Nevill von der University of Wolverhampton und Gregory Whyte vom English Institute of Sport in Bisham haben die Weltrekorde in verschiedenen Disziplinen analysiert, vom 800-Meter-Sprint bis hin zum Marathon, sowohl bei Männern als auch bei Frauen. Der Verlauf der Bestzeiten ähnelt demnach einer S-Kurve, schreiben die Wissenschaftler im Fachblatt *Medicine & Science in Sports & Exercise*[2]."

Als "S-Kurve" bezeichnet man üblicherweise die logistische Kurve

$$y(t) = \frac{a}{1 + e^{b(t-c)}} + d,$$

die eine Lösung der logistischen Differentialgleichung

$$\dot{y} = (\alpha - \beta y)(y - \gamma)$$

darstellt. Letztere beschreibt natürliches Wachstum bei beschränkten Ressourcen. Wir wollen aber nicht die Differentialgleichung lösen, sondern nur die Parameter a, b, c, d in der Darstellung der S-Kurve an die Daten, d.h. die Historie der Weltrekorde, anpassen.

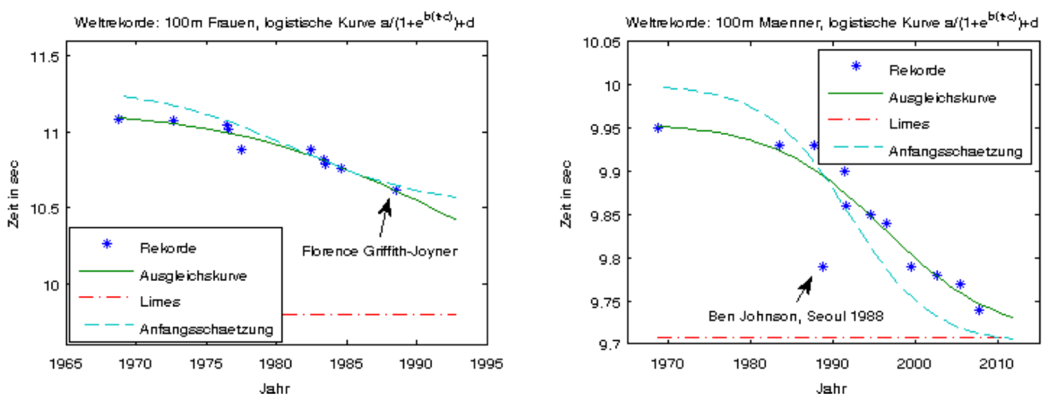

Abbildung 1: Als Beispiel hier die Entwicklung der Weltrekorde im 100m-Lauf seit ca. 1970. Ben Johnsons Rekord wurde wegen Dopings annulliert. Bei den Frauen konvergierte das Gauß-Newton-Verfahren nur nach Weglassen des (gültigen) Weltrekords von 10.49 sec durch Florence Griffith-Joyner am 17. Juli 1988 (am Vortag hatte sie mit 10.61 sec ebenfalls einen Weltrekord aufgestellt).

[1] SPIEGEL ONLINE, 17.11.2005

[2] "Are there limits to running world records", Nevill and Whyte, vol. 37(10), pp. 1785-1788, October 2005

Und nun zur Aufgabe: Laden Sie von der Vorlesungsseite die Datei `WR.m` mit den Weltrekorden herunter. Bestimmen Sie für die Weltrekorde über 1500m eine geeignete S-Kurve, indem Sie ein entsprechendes nichtlineares Ausgleichsproblem mit dem Gauß-Newton-Verfahren lösen. Sie können als Anfangsschätzungen der Parameter zum Beispiel $[a, b, c, d] = [70, 0.4, 1960, 230]$ bei den Frauen und $[a, b, c, d] = [50, 0.4, 1950, 205]$ bei den Männern wählen. Stellen Sie die Ausgleichskurve graphisch dar.

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, wie das nichtlineare Ausgleichsproblem lautet. Linearisieren Sie dieses für das Gauß-Newton-Verfahren. Verwenden Sie dann zum Beispiel die eingebaute Matlab-Funktion `lscov(A,B)` um Ihr lineares Ausgleichsproblem zu lösen.