Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Florian Kunstmann
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerische Optimierung
WiSe 2015/2016

Übungsblatt 5

Besprechung 18.11.2015.

Hinweise: Die Abgabe der Lösung der Aufgabe 13 (Hochspannungsmast) ist bis Montag, 16.11.2015 23.59 Uhr per Email einzureichen an

florian.kunstmann@uni-ulm.de.

Der Betreff sollte lauten "Num3Blatt$x$" (wobei x für die Nummer des Blattes steht). Die Lösungen müssen als **Anhang** an die Email versendet werden. Für jede Programmieraufgabe ist ein zip-file "AufgabeMy" zu erstellen (wobei y für die Nummer der Aufgabe steht), das die nötigen .m-files enthält.

Aufgabe 14 (Eine kleine Wiederholung) (2+2 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ lokales Minimum von $f \in \mathcal{C}^1(B(x^*, R))$, $R > 0$, dann gilt: $\nabla f(x^*) = 0$.
Ist zusätzlich $f \in \mathcal{C}^2(B(x^*, R))$, dann ist $H(x^*) := \nabla^2 f(x^*)$ symmetrisch und positiv definit, also $H(x^*) > 0$.

(b) Falls f konvex ist, dann ist ein kritischer Punkt x^* lokales Minimum.

Aufgabe 15 (Schrittweite zu klein oder zu groß?) (4 Punkte)

Das folgende Beispiel soll zeigen, dass die Schrittweite mit Bedacht gewählt werden muss. Betrachten wir die Funktion $f(x) := x^2$, $x \in \mathbb{R}$, $x^{(0)} := 1$, $d_k = -1$ und $\lambda_k := 2^{-k-2}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Berechnen Sie zunächst

$$x^{(k+1)} := x^{(k)} + \lambda_k d_k.$$

und zeigen Sie dann, dass $x^{(k)} \to \frac{1}{2}$, $f(x^{(k)}) \to \frac{1}{4}$. Was bedeutet dieses Ergebnis für die Schrittweite? Betrachten Sie weiter den Fall $d_k := (-1)^{k+1}$ mit $\lambda_k := 1 + \frac{3}{2^{k+2}}$. Berechnen Sie auch hierfür explizit $x^{(k)}$. Was folgt hierbei für die Schrittweite?

Aufgabe 16 (Liniensuchverfahren, Armijo) (3 Punkte)

Sei $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ mit $f(x) \geq M$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es ein $I := [c, C]$, $0 < c < C$, so dass

$$(1) \quad v_M(x^{(k+1)}) := \frac{1}{\alpha_k}\left[f(x^{(k)}) - f(x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)})\right] \geq -\sigma \nabla f(x^{(k)})^T d^{(k)} > 0$$

$$(2) \quad |\nabla f(x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)})^T d^{(k)}| \leq \beta |\nabla f(x^{(k)})^T d^{(k)}|$$

für alle $\alpha_k \in I$ mit $\sigma \in (0, \frac{1}{2})$, $\beta \in (\sigma, 1)$ erfüllt sind.