Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Florian Kunstmann
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerische Optimierung
WiSe 2015/2016

# Übungsblatt 6

Besprechung 25.11.2015.

## Aufgabe 17 (Es gibt noch so viel zu optimieren...) (3+3 Punkte)

Sei $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ und $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Weiter betrachten wir die durch $H$ induzierte Norm $\|x\|_H := \sqrt{x^T H x}$. Zeigen Sie

(i) Die Richtung des steilsten Abstiegs von $f$ in einem Punkt $x$ mit $\nabla f(x) \neq 0$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_H$, d.h. die Lösung der Optimierungsaufgabe

$$\min_x \nabla f(x)^T d \quad \text{unter der NB: } \|d\|_H = 1,$$

ist gegeben durch

$$d = -\frac{H^{-1}\nabla f(x)}{\|H^{-1}\nabla f(x)\|_H}.$$

(ii) Seien $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}, (d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}^n$ mit

$$d_k := -H^{-1}\nabla f(x_k) \neq 0.$$

Dann genügt die Folge $(d_k)$ der Winkelbedingung, d.h. $\exists c > 0$ :

$$-\frac{\nabla f(x_k)^T d_k}{\|\nabla f(x_k)\|\|d_k\|} \geq c \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm ist und insbesondere eine submultiplikative Norm ist, d.h. $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$

## Aufgabe 18 (Restringierte Optimierung) (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := 2x^2 + xy + 3y^2 - 4x - y.$$

Wie müssen die Parameter $\alpha$ und $\beta$ gewählt werden, dass unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) := 3x + \alpha y - \beta = 0$$

im Punkt $(3, -2)^T$ eine Minimalstelle vorliegt?

## Aufgabe 19 (Gleichungsrestringierte Optimierung I) (3 Punkte)

Es wird das folgende Problem betrachtet:

$$\min f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x, \qquad \text{unter der NB: } Bx = g, \tag{1}$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv semi-definit, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \leq n$ und $g \in \mathbb{R}^m$ ist. Sei nun $Z \in \mathbb{R}^{n\times(n-m)}$ eine Matrix, deren Spalten eine Basis für kern$(B)$ bilden, d.h. $BZ = 0 \in \mathbb{R}^{m\times(n-m)}$. Zeigen Sie: Falls rang$(B) = m$ und $Z^T AZ$ positiv definit ist, dann ist die Matrix

$$K = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

invertierbar. Insbesondere existiert ein eindeutiges Paar $(x^*, \lambda^*)$, welches Lösung des Sattelpunktproblems

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ g \end{pmatrix} \tag{2}$$

ist.

## Aufgabe 20 (Gleichungsrestringierte Optimierung II) (4 Punkte)

Seien die Voraussetzungen aus Aufgabe 19 erfüllt. Dann ist die eindeutige Lösung von (2) auch eine eindeutige Lösung von (1).

## Aufgabe 21 (Ungleichungsrestringierte Optimierung) (4 Punkte)

Nun wird das ungleichungsrestringierte Problem betrachtet:

$$\min f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x, \qquad \text{unter der NB: } Bx = g,\ Cx \geq r, \tag{3}$$

wobei $A, B$ wie in Aufgabe 19 sind und $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ und $r \in \mathbb{R}^p$. Die Lagrange-Funktion ist gegeben durch:

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x + \langle Bx - g, \lambda \rangle_{\mathbb{R}^m} + \langle r - Cx, \mu \rangle_{\mathbb{R}^p}.$$

Zeigen Sie, falls $x^*$ die Bedingungen:

$$\begin{aligned}
Ax^* + b + B^T \lambda^* - C^T \mu^* &= 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^n, && (4)\\
Bx^* &= g \qquad \text{in } \mathbb{R}^m, && (5)\\
Cx^* &\geq r \qquad \text{in } \mathbb{R}^p, && (6)\\
\mu^* &\geq 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^p, && (7)\\
(\mu^*)^T (r - Cx^*) &= 0 && (8)
\end{aligned}$$

erfüllt zusammen mit einem $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ und einem $\mu^* \in \mathbb{R}^p$ und wenn $A$ positiv semi-definit auf $\text{kern}(B)$ ist, dann ist $x^*$ eine globale Lösung von (3).