Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Florian Kunstmann
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Übungsblatt 8

Besprechung 09.12.2015.

Aufgabe 24 (Active Set Methode I) (2+2+3+2 Punkte)

Wir betrachten das folgende Minimierungsproblem.

$$\min f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x, \qquad \text{unter der NB: } Bx = g,\ Cx \leq r. \tag{1}$$

Desweiteren bezeichnen wir mit c_i^T bzw. b_i^T die Zeilenvektoren der Matrix C bzw. B und wir betrachten Algorithmus 4.3.2 im Skript mit dessen Bezeichnungen und Notationen. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(i) Zeigen Sie Aussage d) von Bemerkung 4.3.7 im Skript.

(ii) Ist die Matrix A positiv definit und sind die Vektoren c_i für $i \in J_k$ sowie b_j für $j = 1, \dots, m$, linear unabhängig, so ist das Problem (4.13) eindeutig lösbar.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst Aussage (i) und zeigen Sie, dass sich Gleichung (4.21) äquivalent umschreiben lässt als lineares Gleichungssystem der Form:

$$\begin{pmatrix} A & B^T & C_k^T \\ B & 0 & 0 \\ C_k & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d^{(k)} \\ \lambda^{(k)} \\ \mu^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla f(x^{(k)}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

(iii) Sind im k-ten Schritt von Algorithmus 4.3.2 die Vektoren von c_i für $i \in J_k$ und b_j für $j = 1, \dots, m$, linear unabhängig und tritt in Schritt (2) und (3) von Algorithmus 4.3.2 kein Abbruch ein, so sind die Vektoren c_i für $i \in J_{k+1}$ und b_j für $j = 1, \dots, m$ wiederum linear unabhängig.

(iv) Ist die Matrix A positiv definit, so gilt für den in Schritt (3) von Algorithmus 4.3.2 berechneten Vektor $d^{(k)}$ im Fall $d^{(k)} \neq 0$:

$$\nabla f(x^{(k)})^T d^{(k)} < 0,$$

d.h. $d^{(k)}$ ist eine Abstiegsrichtung.

Aufgabe 25 (Active Set Methode II) (6 Punkte)

Gegeben sei das quadratische Programm

$$\text{minimiere} \quad f(x) := \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x \quad \text{auf} \quad M := \{x \in \mathbb{R}^2 :\ Cx \leq r\}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad r = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Führen Sie die einzelnen Schritte der Active Set Methode mit $x^{(0)} = (0, 0)^T$ per Hand durch und berechnen Sie die Lösung (x^*, λ^*) des Problems.