Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Florian Kunstmann
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Übungsblatt 11

Besprechung 20.01.2016.

Aufgabe 34 (Zentraler Pfad) (2+2+1+2 Punkte)

Man betrachte das *konvexe quadratische Problem*:

$$\begin{cases} f(x) := \frac{1}{2}x_1^2 + x_2 \to \min \\ \text{Nebenbedingungen: } g_1(x) := -x_1 \leq 0, \quad g_2(x) := -x_2 \leq 0 \end{cases} \tag{1}$$

(i) Stellen Sie das *Barriereproblem* (B)

$$\begin{cases} f(x) + \mu\Phi(x) \to \min \\ \text{Nebenbedingung: } Ax = b, \end{cases}$$

wobei $\Phi(x) := -\sum_{i=1}^{m} \log(-g_i(x))$ die *logarithmische Barriere* ist, auf. Berechnen Sie Gradient und Hessematrix der Zielfunktion von (B).

(ii) Bestimmen Sie die Lösung $x(\mu)$ von (B) und skizzieren Sie den *zentralen Pfad*.

(iii) Zeigen Sie, dass $x^* = \lim_{\mu\to 0^+} x(\mu)$ existiert und dass x^* Lösung von (1) ist.

(iv) Wie ändert sich der zentrale Pfad, wenn die Nebenbedingung $-x_2 \leq 0$ in (1) M-mal auftritt?

Aufgabe 35 (Duale logarithmische Barriere) (4 Punkte)

Betrachten Sie das logarithmische Barriere-Problem

$$\psi_\mu(x) := \langle c, x\rangle - \mu \sum_{i=1}^{n} \log(x_i)$$

und dessen logarithmische Barriere Funktion $\widetilde{\psi}_\mu(y)$ des dualen Problems. Zeigen Sie:

Die Funktion $\widetilde{\psi}_\mu$ besitzt einen Maximierer $x^* \in \mathcal{F}_D^0$ genau dann, wenn

$$H_\mu(x, y, s) := \begin{pmatrix} A^T y + s - c \\ Ax - b \\ Xs - \mu e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \geq 0, s \geq 0$$

eine Lösung besitzt. Im Falle der Existenz ist die Lösung eindeutig.